

2018 年河南省普通高等学校
选拔优秀专科毕业生进入本科阶段学习考试
高等数学

题号	一	二	三	四	五	总分
分值	60	20	50	14	6	150

注意事项:

答题前, 考生务必将自己的姓名、考场号、座位号、考生号填写在答题卡上。

本卷的试题答案必须答在答题卡上, 答在卷上无效。

一. 选择题 (每小题 2 分, 共 60 分)

在每小题的四个备选答案中选出一个正确答案, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。

1. 函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ 的定义域是 ()

- A. $[-2, 2]$ B. $(-2, 2)$ C. $(-2, 2]$ D. $[-2, 2]$

2. 函数 $f(x) = (e^x - e^{-x}) \sin x$ 是 ()

- A. 偶函数 B. 奇函数
C. 非奇非偶函数 D. 无法判断奇偶性

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 - x + 1} = ()$

- A. 0 B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. 2

4. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1+x^2)^k - 1$ 与 $1 - \cos x$ 为等价无穷小, 则 k 的值为 ()

- A. 1 B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. -1

5. 函数 $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$ 在 $x=1$ 处间断点类型为 ()

- A. 连续点 B. 可去间断点 C. 跳跃间断点 D. 第二类间断点

6. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个领域内有定义, 则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的一个充要条件为 ()

- A. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a+h)}{h}$ 存在 B. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$ 存在

C. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a) - f(a-h)}{h}$ 存在

D. $\lim_{h \rightarrow +\infty} h \left[f\left(a + \frac{1}{h}\right) - f(a) \right]$ 存在

7. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x \arctan \frac{1}{x} - \frac{\arctan x}{x} \right] = (\quad)$

A. -1

B. 1

C. 0

D. 2

8. 已知 $y = x \ln x$, 则 $y'' = (\quad)$

A. $\frac{1}{x}$

B. $\frac{1}{x^2}$

C. $-\frac{1}{x}$

D. $-\frac{1}{x^2}$

9. 已知二元函数 $z = (2y+1)^x$, 则 $\frac{\partial z}{\partial y} = (\quad)$

A. $x(2y+1)^{x-1}$

B. $2x(2y+1)^{x-1}$

C. $(2y+1)^x \ln(2y+1)$

D. $2(2y+1)^x \ln(2y+1)$

10. 曲线 $y = \frac{x^2}{x^2 + x - 2}$ 的水平渐近线为 $(\quad)$

A. $y=1$

B. $y=0$

C. $x=-2$

D. $x=1$

11. 在下列等式正确的是 $(\quad)$

A. $d \int f(x) dx = f'(x) + C$

B. $d \int f(x) dx = f(x) + C$

C. $\int f'(x) dx = f(x) + C$

D. $\frac{d}{dx} \int df(x) = f(x)$

12. 已知 $\int f(x) dx = x^3 + C$, 则 $\int x f(1-x^2) dx = (\quad)$

A. $(1-x^2)^3 + c$

B. $\frac{1}{2} (1-x^2)^3$

C. $\frac{1}{2} (1-x^2)^3 + c$

D. $-\frac{1}{2} (1-x^2)^3 + c$

13. 设函数 $\frac{d}{dx} \int_0^{e^x} (1+t^2) dt = (\quad)$

A. $(1+e^{2x})e^x$

B. $(1+e^{x^2})e^x$

C. $(1+e^{2x})e^{2x}$

D. $(1+e^{x^2})e^{2x}$

14. 下列不等式成立的是 $(\quad)$

A. $\int_0^1 x dx > \int_0^1 x^2 dx$

B. $\int_1^2 x dx > \int_1^2 x^2 dx$

C. $\int_0^1 x dx < \int_0^1 x^2 dx$

D. $\int_1^2 x dx > \int_1^2 x^3 dx$

15. 下列广义积分中收敛的是 ()

A. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ B. $\int_e^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3}} dx$ C. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ D. $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$

16. 已知向量 $\vec{a} = \{2, -3, 1\}$, $\vec{b} = \{1, -1, 3\}$, 则它们的夹角的余弦为 ()

A. $\frac{8}{\sqrt{14}}$ B. $\frac{8}{\sqrt{11}}$ C. $\frac{8}{\sqrt{154}}$ D. 0

17. 曲线 $\begin{cases} z = y^2 \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转所得旋转曲面方程为 ()

A. $z = x^2 + y^2$ B. $z = x^2 - y^2$ C. $z = y^2 - x^2$ D. $z = (x + y)^2$

18. 极限 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2) e^{(x^2 + y^2)}} = ()$

A. $\frac{1}{2}$ B. 2 C. 1 D. 0

19. 关于二元函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处, 下列说法正确的是 ()

- A. 可微侧偏导数一定存在 B. 连续一定可微
C. 偏导存在一定可微 D. 偏导存在一定连续

20. 将二次积分 $\int_0^3 dx \int_{x^2}^{3x} f(x, y) dy$ 改写成另一种次序的积分是 ()

A. $\int_0^3 dy \int_{y^2}^{3y} f(x, y) dx$ B. $\int_{x^2}^{3x} dx \int_0^3 f(x, y) dy$
C. $\int_{x^3}^{3x} dx \int_0^3 f(x, y) dy$ D. $\int_0^9 dy \int_{\frac{y}{3}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$

21. 设 L 为 $y = x^2$ 抛物线介于 $(0, 0)$ 和 $(\sqrt{2}, 2)$ 之间的一段弧, 则曲线积分 $\int_L \sqrt{y} ds = ()$

A. $\frac{13}{6}$ B. $-\frac{13}{6}$ C. $-\frac{6}{13}$ D. $\frac{6}{13}$

22. 关于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\sin(na)}{n^2} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$, 下列说法正确的是 ()

- A. 绝对收敛 B. 发散 C. 条件收敛 D. 敛散性与 a 有关

23. 设幂函数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处条件收敛, 则它在 $x=2$ 处 ()

- A. 绝对收敛 B. 条件收敛 C. 发散 D. 不能确定

24. 设 y_1, y_2, y_3 是非齐次线性微分方程 $y''' + p(x)y' + q(x)y = \varphi(x)$ 三个线性无关的解, 则该方程的通解为 ()

- A. $C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3$ B. $C_1y_1 + C_2y_2 - (C_1 + C_2)y_3$
C. $C_1y_1 + C_2y_2 - (1 - C_1 - C_2)y_3$ D. $C_1(y_1 - y_3) + C_2(y_2 - y_3) + y_3$

25. 微分方程 $(y'')^4 + 2x(y') - xy = 0$ 的阶数为 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

26. 平面 $\pi: x + 2y - 3z = 0$ 与直线 $l: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-3}$ 的位置关系是 ()

- A. 平行但不在平面内 B. 在平面内 C. 垂直 D. 相交但不垂直

27. 用待定系数法求微分方程 $y'' - 3y' + 2y = xe^{2x}$ 的特解 y^* 时, 下列 y^* 的设法正确的是 ()

- A. $y^* = x(Ax + B)e^{2x}$ B. $y^* = (Ax + B)e^{2x}$
C. $y^* = Ax^2e^{2x}$ D. $y^* = Axe^{2x}$

28. 若曲线积分 $\int_L (3x^2y + axy^2)dx + (x^3 + 8x^2y + 12ye^y)dy$ 在整个 xoy 平面内与路无关, 则常数 $a =$ ()

- A. -8 B. $\frac{1}{8}$ C. $\frac{1}{8}$ D. 8

29. 下列微分方程中, 通解为 $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$ 的二阶常系数齐次线性微分方程是 ()

- A. $y'' - 5y' + 6y = 0$ B. $y'' + 5y' + 6y = 0$
C. $y'' - 6y' + 5y = 0$ D. $y'' + 6y' + 5y = 0$

30. 对函数 $f(x) = \sqrt{x} - 1$ 在闭区间 $[1, 4]$ 上应用拉格朗日中值定理时, 结论中的 $\xi =$ ()

- A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{4}{9}$ D. $\frac{9}{4}$

二、填空题 (每小题 2 分, 共 20 分)

31. 已知 $f(x) = e^x$, 且 $f[\varphi(x)] = 1 + 2x(x > 0)$, 则 $\varphi(x)$ _____.

32. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3+x}{2+x} \right)^{2x} = \underline{\hspace{2cm}}.$

33. 设 $f(x) = \begin{cases} ae^x + 1, & x < 0 \\ x + 2, & x \geq 0 \end{cases}$, 在 $x=0$ 处连续, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}.$

34. 已知函数 $y = x \sin x$, 则 $dy = \underline{\hspace{2cm}}.$

35. 曲线 $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{cases}$, 在 $t=1$ 对应的点处法平面方程为 $= \underline{\hspace{2cm}}.$

36. 极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x} = \underline{\hspace{2cm}}.$

37. 不定积分 $\int \frac{1}{x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

38. $\int_{-1}^1 (x^2 + x \cos x) dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

39. 已知函数 $f(x, y, z) = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 则 $\text{grad} f(1, 1, 1) = \underline{\hspace{2cm}}.$

40. 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot 3^{1-n} = \underline{\hspace{2cm}}.$

三、计算题 (每小题 5 分, 共 50 分)

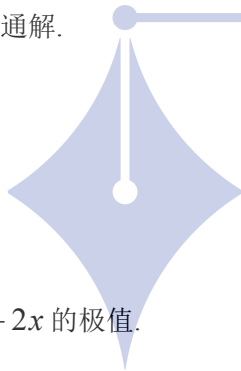
41. 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\tan x - x}{x^2(e^x - 1)}.$

42. 已知 $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}.$

43. 求不定积分 $\int x \sqrt{x-1} dx.$

44. 求定积分 $\int_1^{e^2} \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}} dx$.

45. 求微分方程 $y'' - 6y' + 9y = 0$ 的通解.



46. 求函数 $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2y - 2x$ 的极值.

宏亮专升本
HONG LIANG EDUCATION

47. 将函数 $f(x) = \ln(2+x)$ 展开为 $x-1$ 的幂级数.

48. 设 D 是由 $y = x, y = 2x$ 和 $x = 1$ 围成的闭区域, 求二重积分 $\iint_D y dx dy$.

49. 求函数 $y = 3x^4 - 4x^3 + 2$ 的凹凸区间和拐点.



50. 已知函数 $z = e^{xy} + \cos(x + y)$, 求全积分 dz .

宏亮专升本
HONG LIANG EDUCATION

四、应用题（每小题 7 分，共 14 分）

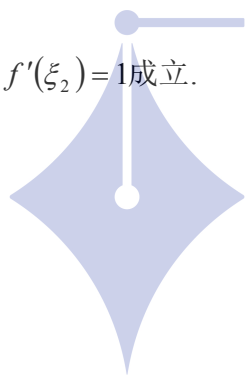
51. 设平面图形 D 是由曲线 $y = \frac{1}{x}$, 直线 $y = x$ 及 $x = 3$ 所围成的部分, 求 D 绕 x 轴旋转形成的旋转体的体积.

52.某车间靠墙壁要盖一间长方形的小屋，现有存砖只能够砌 20 米长的墙壁，问应围成怎样的长方形才能使这间小屋的面积最大？

五、证明题（6 分）

53. 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 内连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0) = 0, f(1) = \frac{1}{2}$ ，证明：存在两个不

同点 $\xi_1, \xi_2 \in (0,1)$ ，使得 $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 1$ 成立。



宏亮专升本
HONG LIANG EDUCATION

2017 年河南省普通高等学校

选拔优秀专科毕业生进入本科阶段学习考试

高等数学

题号	一	二	三	四	五	总分
分值	60	20	50	14	6	150

注意事项：

答题前，考生务必将自己的姓名、考场号、座位号、考生号填写在答题卡上。

本卷的试题答案必须答在答题卡上，答在卷上无效。

一、 选择题（每小题 2 分，共 60 分）

每小题的四个备选答案中选出一个正确答案，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。

1. 函数 $f(x) = \sin x + 3x$ 是 ()
A. 偶函数 B. 奇函数
C. 非奇非偶函数 D. 无法判断奇偶性
2. 函数 $f(x) = \frac{2}{x-5}$ 的定义域是 ()
A. $(-\infty, 5)$ B. $(+\infty, 5)$
C. $(-\infty, 5) \cup (5, +\infty)$ D. $[5, +\infty)$
3. 设函数 $y = \cos 5x - \sin 3x$, 则 $y' =$ ()
A. $-5\sin 5x - 3\cos 3x$ B. $5\cos 5x + 3\sin 3x$
C. $\cos 5x - \sin 3x$ D. $\cos 5x + \sin 3x$
4. 设 $z = 6x^3y^2$, 则 $\frac{\partial z}{\partial y} =$ ()
A. $18x^2y^2$ B. $12x^3y$ C. $18x^3y$ D. $6x^2y^2$
5. $\frac{d}{dx} \left[\int_0^x \sqrt{t} \ln(1+t) dt \right] =$ ()
A. $\sqrt{x} \ln(1+x)$ B. $-\sqrt{x} \ln(1+x)$ C. $x \ln(1+x)$ D. $\sqrt{x}(1+x)$
6. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 为正项级数, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{|a_n|}{\sqrt{n^2 + b_n}} =$ ()
A. 条件收敛 B. 绝对收敛
C. 发散 D. 敛散性无法判断
7. 下列积分可以用牛顿-莱布尼茨公式计算的是 ()
A. $\int_0^2 x e^x dx$ B. $\int_0^2 \frac{1}{1-x} dx$
C. $\int_{\frac{1}{e}}^e \frac{1}{x \ln x} dx$ D. $\int_{-1}^1 \frac{1}{1-x^2} dx$
8. 已知极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin bx}{5x} = 1$, 则 b 的值是 ()
A. 5 B. 1 C. 0 D. $\frac{1}{5}$
9. 定积分 $\int_0^1 (2x + k) dx = 2$, 则 k 的值 ()
A. 0 B. 1 C. -1 D. 2
10. 二元函数 $z = 2x^2 + xy^3$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ ()
A. $4x$ B. $2y$ C. $3y^2$ D. $3x^2$

11. 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 5x}{x^3}$ 的值是 ()
 A. 4 B. 1 C. 2 D. 5
12. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列无穷小量中阶数最高的是 ()
 A. x^2 B. $1 - \cos x$ C. $\sqrt{1-x} - 1$ D. $\sin x - \tan x$
13. 函数 $y = 3x^4 - 4x^3$ ()
 A. 在 $(-\infty, 1)$ 内单调递减 B. 在 $(-\infty, 0)$ 内单调递增
 C. 在 $(0, +\infty)$ 内单调递减 D. 在 $(0, +\infty)$ 内单调递增
14. $y = \cos x$ 在闭区间 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上符合罗尔中值定理结论的 ξ 是 ()
 A. 0 B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. $-\frac{\pi}{4}$
15. $\cos \frac{\pi}{2}x$ 的一个原函数是 ()
 A. $\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2}x$ B. $\frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi}{2}x$ C. $\frac{\pi}{2} \sin \frac{2}{\pi}x$ D. $\frac{\pi}{2} \sin \frac{x}{2}$
16. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1} =$ ()
 A. ∞ B. 2 C. 0 D. -2
17. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \sin \frac{3}{x} + \frac{\sin 3x}{x} \right) =$ ()
 A. 4 B. 2 C. 3 D. 1
18. 设 $f(x) = x^{\frac{1}{x-1}}$, 则 $x=1$ 是 $f(x)$ 的 ()
 A. 连续点 B. 无穷间断点 C. 跳跃间断点 D. 可去间断点
19. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列变量中与 x 为等价无穷小量的是 ()
 A. $\sin^2 x$ B. $\ln(1+2x)$ C. $x \sin x$ D. $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$
20. 向量 $\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ 垂直于 $\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b}$, 向量 $\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$ 垂直于 $\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$, 则向量 $\vec{a}$ 与向量 $\vec{b}$ 之间的夹角为 ()
 A. 0 B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{\pi}{6}$
21. 设 $a < x < b, f'(x) < 0, f''(x) < 0$, 在区间 (a, b) 内, 函数 $y=f(x)$ 的图形 ()
 A. 沿 x 轴正下降且为凹的 B. 沿 x 轴正下降且为凸的
 C. 沿 x 轴正上升且为凹的 D. 沿 x 轴正上升且为凸的
22. “ $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在” 是 “ $f(x)$ 在 a 连续” 的 ()
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既非充分也非必要条件
23. 曲线 $y = e^{1-x^2}$ 与直线 $x=-1$ 的交点为 Q , 则曲线 $y = e^{1-x^2}$ 在点 Q 处的切线方程是 ()
 A. $2x-y-2=0$ B. $2x+y-2=0$ C. $2x+y+3=0$ D. $2x-y+3=0$
24. 函数 $f(x) = \ln|x-1|$ 的导数是 ()
 A. $f'(x) = \frac{1}{|x-1|}$ B. $f'(x) = \frac{1}{x-1}$

C. $f(x) = \frac{1}{1-x}$

D. 不存在

25. 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都发散, 则下列结论正确的是 ()

A. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ 必发散

B. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n b_n)$ 必收敛

C. $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$ 必发散

D. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ 必发散

26. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 ()

A. 极限不存在

B. 极限存在但不连续

C. 连续但不可导

D. 连续且可导

27. 设 $f(x) = x \cos x$, 则 $f'(\frac{\pi}{2}) = ()$

A. $\frac{1}{2}$

B. 1

C. $-\frac{\pi}{2}$

D. 2π

28. 微分方程 $xy' = y + x^3$ 通解是 ()

A. $\frac{x^3}{3} + C$

B. $\frac{x^3}{2} + Cx$

C. $\frac{x^3}{4} + Cx$

D. $\frac{x^3}{4} + C$

29. 已知平面 $\Pi_1: mx + y - 3z + 1 = 0$ 与平面 $\Pi_2: 7x - 2y - z = 0$, 若 $\Pi_1 \perp \Pi_2$, 则 m 的值是 ()

A. $\frac{1}{7}$

B. $-\frac{1}{7}$

C. 7

D. -7

30. 设 x_0 是函数 $f(x)$ 的极值点, 则下列命题正确的是 ()

A. $f'(x_0) = 0$

B. $f'(x_0) \neq 0$

C. $f'(x_0) = 0$ 或 $f'(x_0)$ 不存在

D. $f'(x_0)$ 不存在

二、填空题 (每空 2 分, 共 20 分)

31. 已知 $f(x+1) = x^2 + 2$, 则 $f(\cos x) =$ _____.

32. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1+n^2}} + \frac{1}{\sqrt{2+n^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+n^2}} \right) =$ _____.

33. 已知函数 $y = x \arctan x$, 则 $y'' =$ _____.

34. 设 $y = \sin^3(2x+1)$, $y' =$ _____.

35. 不定积分 $\int e^{2x} \cos 3x dx =$ _____.

36. 定积分 $\int_2^3 \frac{1}{x^2} dx =$ _____.

37. 设直线 $\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+4}{p}$ 与平面 $2x-y-z+5=0$, 则 $P=$ _____.

38. 设 $y = e^{x \cos x}$, $dy =$ _____.

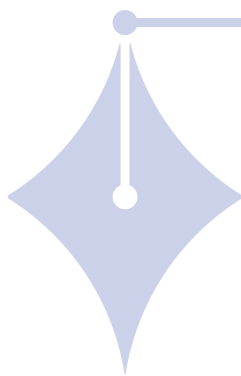
39. 平行于向量 $\vec{u} = (2, 3, 1)$ 的单位向量为_____.

40. 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$ 与 $\frac{1}{3}$, 则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{b_n^2} x^n$ 的收敛半径_____.

三、计算题 (每小题 5 分, 共 50 分)

41. 求函数 $z = x^2 y^2 + e^{xy}$ 在点 $(1, 1)$ 处的全微分.

42. 计算定积分 $\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx$.

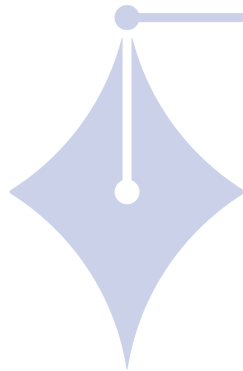


宏亮专升本
HONG LIANG EDUCATION

43. 计算极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{3x}$

44. 计算不定积分 $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$.

45. 求微分方程 $2(xy + x)y' = y$ 的通解.



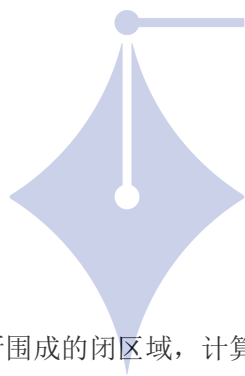
46. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n} x^{n-1}$ 的收敛域.

宏亮专升本
HONG LIANG EDUCATION

47. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\ln(x^2 + y) = x^3 y + \sin x$ 确定, 求 $\frac{dy}{dx}|_{x=0}$.

48. 求曲线 $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$ 在 $t = \frac{\pi}{2}$ 处的法线方程.

49. 设 $y = x^{\sin x} (x > 0)$, 求 y' .



50. 已知 D 是由 $y = x^2$ 和 $x = y^2$ 所围成的闭区域, 计算二重积分 $\iint_D (x + y) dx dy$

宏亮专升本
HONG LIANG EDUCATION

四、应用题 (每小题 7 分, 共 14 分)

51. 欲围成一个面积为 $150m^2$ 的矩形场地, 所用材料的造价正面 6 元/ m^2 , 其余三面 3 元/ m^2 , 四面墙的高度相同, 试问场地的长和宽各是多少米时, 才能使所有的材料费用最低?

52. 求由抛物线 $2y^2 = x$ 与直线 $x - 2y = 4$ 所围成的平面图形的面积.

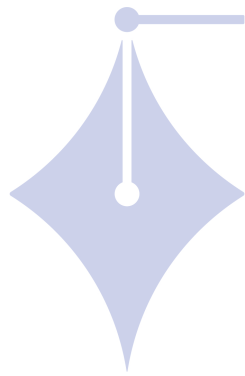
五、证明题（6分）

53. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，在 $(0, 1)$ 内可导，且 $f(0) = 0$ ， $f(1) = 1$.

证明：（1）存在 $\xi \in (0, 1)$ ，使得 $f(\xi) = 1 - \xi$ ；

（2）存在两个不同的点 $\eta, \mu \in (0, 1)$ ，使得 $f'(\eta)f'(\mu) = 1$.

宏亮专升本
HONG LIANG EDUCATION



宏亮专升本
HONG LIANG EDUCATION

2016 年河南省普通高等学校
选拔优秀专科毕业生进入本科阶段学习考试
高等数学

题号	一	二	三	四	五	总分
分值	60	20	50	12	8	150

注意事项:

答题前, 考生务必将自己的姓名、考场号、座位号、考生号填写在答题卡上。

本卷的试题答案必须答在答题卡上, 答在卷上无效。

一. 选择题 (每小题 2 分, 共 60 分)

在每小题的四个备选答案中选出一个正确答案, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑, 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。

1. 函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ 的定义域是 ()

- A. $(-\infty, -1]$ B. $(-\infty, -1)$ C. $(-\infty, 1]$ D. $(-\infty, 1)$

2. 函数 $f(x) = x - 2x^3$ 是 ()

- A. 奇函数 B. 偶函数 C. 非奇非偶函数 D. 无法判断奇偶性

3. 已知 $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$, 则 $f[f(x)] =$ ()

- A. $x - 1$ B. $\frac{1}{x-1}$ C. $1 - x$ D. $\frac{1}{1-x}$

4. 下列极限不存在的是 ()

- A. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 + 1}$ B. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 + 1}$ C. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x$ D. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x$

5. 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 2x - x^2}{x^2}$ 的值是 ()

- A. 0 B. 1 C. -1 D. -2

6. 已知极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin ax} = 2$, 则 a 的值是 ()

- A. 1 B. -1 C. 2 D. $\frac{1}{2}$

7. 已知当 $x \rightarrow 0$ 时, $2 - 2 \cos x - ax^2$, 则 a 的值是 ()

- A. 1 B. 2 C. $\frac{1}{2}$ D. -1

8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - ax + 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$ 则在点 $x=1$ 处, 下列结论正确的是 ()

- A. $a=2$ 时, $f(x)$ 必连续 B. $a=2$ 时, $f(x)$ 不连续
C. $a=-1$ 时, $f(x)$ 连续 D. $a=1$ 时, $f(x)$ 必连续

9. 已知函数 $\varphi(x)$ 在点 $x=0$ 处可导, 函数 $f(x) = (x-1)\varphi(x-1)$, 则 $f'(1)$ ()

- A. $\varphi'(0)$ B. $\varphi'(1)$ C. $\varphi(0)$ D. $\varphi(1)$

10. 函数 $f(x) = 1 - |x-1|$ 在点 $x=1$ 处 ()

- A. 不连续 B. 连续且可导
C. 既不连续也不可导 D. 连续但不可导

11. 若曲线 $f(x) = 1 - x^3$ 与曲线 $g(x) = \ln x$ 在自变量 $x=x_0$ 时的切线相互垂直, 则 x_0 应为 ()

- A. $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ B. $-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $-\frac{1}{3}$

12. 已知 $f(x) = 1 - x^4$ 在闭区间 $[-1, 1]$ 上满足罗尔中值定理, 则在开区间 $(-1, 1)$ 内使 $f'(\xi) = 0$ 成立的 $\xi =$ ()

- A. 0 B. 1 C. -1 D. 2

13. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 内连续, 若 $x \in (-1, 0)$ 时, $f'(x) < 0$; $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) > 0$, 则在区间 $(-1, 1)$ 内 ()

- A. $f(0)$ 是函数 $f(x)$ 的极小值 B. $f(0)$ 是函数 $f(x)$ 的极大值
C. $f(0)$ 不是函数 $f(x)$ 的极值 D. $f(0)$ 不一定是函数 $f(x)$ 的极值

14. 设函数 $y = f(x)$ 在区间 $(0, 2)$ 内具有二阶导数, 若 $x \in (0, 1)$ 时, $f''(x) < 0$; $x \in (1, 2)$ 时, $f''(x) > 0$, 则 ()

- A. $f(1)$ 是函数 $f(x)$ 的极大值
- B. 点 $(1, f(1))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点
- C. $f(1)$ 是函数 $f(x)$ 的极小值
- D. 点 $(1, f(1))$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

15. 已知曲线 $y = x^4$, 则 ()

- A. 在 $(-\infty, 0)$ 内 $y = x^4$ 单调递减且形状为凸
- B. 在 $(-\infty, 0)$ 内 $y = x^4$ 单调递增且形状为凹
- C. 在 $(0, +\infty)$ 内 $y = x^4$ 单调递减且形状为凸
- D. 在 $(0, +\infty)$ 内 $y = x^4$ 单调递增且形状为凹

16. 已知 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则不定积分 $\int f(x-1)dx = ()$

- A. $F(x-1) + C$
- B. $F(x) + C$
- C. $-F(x-1) + C$
- D. $-F(x) + C$

17. 设函数 $f(x) = \int_0^x (e^{-t} + t^2)dt$, 则 $f'(x) = ()$

- A. $-e^{-x} + \frac{1}{3}x^3$
- B. $-e^{-x} + 2x$
- C. $e^{-x} + x^2$
- D. $e^{-x} + 2x$

18. 定积分 $\int_{-a}^a xe^{-x^2}dx = ()$

- A. $2ae^{-a^2}$
- B. ae^{-a^2}
- C. 0
- D. $2a$

19. 由曲线 $y = e^{-x}$ 与直线 $x = 0, x = 1, y = 0$ 所围成的平面图形的面积是 ()

- A. e^{-1}
- B. 1
- C. $1 - e^{-1}$
- D. $1 + e^{-1}$

20. 设定积分 $I_1 = \int_1^2 x^2 dx$, $I_2 = \int_1^2 x dx$, 则 ()

- A. $I_1 = I_2$
- B. $I_1 > I_2$
- C. $I_1 < I_2$
- D. 不能确定 I_1 与 I_2 的大小

21. 向量 $\vec{a} = \vec{j} + \vec{k}$ 的方向角是 ()

A. $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$

B. $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$

C. $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}$

D. $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$

22. 已知 e^{-x} 是微分方程 $y'' + 3ay' + 2y = 0$ 的一个解。则常数 $a =$ ()

A. 1

B. -1

C. 3

D. $-\frac{1}{3}$

23. 下列微分方程可进行分离变量的是 ()

A. $y' = (x + y) e^{x+y}$

B. $y' = xye^{x+y}$

C. $y' = xye^{xy}$

D. $y' = (x + y) e^{xy}$

24. 设二元函数 $z = x^3 + xy^2 + y^3$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ ()

A. $3y^2$

B. $3x^2$

C. $2y$

D. $2x$

25. 用钢板做成一个表面积为 $54m^2$ 的有盖长方体水箱, 欲使水箱的容积最大, 则水箱的最大容积为 ()

A. $18m^3$

B. $27m^3$

C. $6m^3$

D. $9m^3$

26. 设 $D = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$, 则二重积分 $\iint_D 4xdxdy =$ ()

A. 16π

B. 8π

C. 4π

D. 3π

27. 已 $\iint_D f(x, y)d\sigma = \int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy$, 则交换积分次序后 $\iint_D f(x, y)d\sigma =$ ()

A. $\int_0^1 dy \int_y^1 f(x, y) dx$

B. $\int_0^1 dy \int_0^y f(x, y) dx$

C. $\int_0^x dy \int_0^1 f(x, y) dx$

D. $\int_0^1 dy \int_0^x f(x, y) dx$

28. 设 L 为连接点 $(0, 0)$ 与点 $(1, \sqrt{3})$ 的直线段, 则曲线积分 $\int_L y^2 ds =$ ()

A. 1

B. 2

C. 3

D. $\sqrt{3}$

29. 下列级数发散的是 ()

A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

B. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$

C. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

D. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$

30. 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 则下列结论正确的是 ()

A. 若级数 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

B. 若部分和数列 $\{S_n\}$ 有界, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

C. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

D. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛

二、填空题 (每小题 2 分, 共 20 分)

31. 函数 $f(x) = x^3$ 的反函数是 $y =$ _____.

32. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{2n+1} =$ _____.

33. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2-x, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, 则点 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的 _____ 间断点.

34. 函数 $f(x) = e^{1-x}$ 在点 $x = 0.99$ 处的近似值为 _____.

35. 不定积分 $\int \sin(x+1) dx =$ _____.

36. 定积分 $\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx =$ _____.

37. 函数 $z = xy - x^2 - y^2$ 在点 $(0,1)$ 处的全微分 $dz|_{(0,1)} =$ _____.

38. 与向量 $\{2,1,2\}$ 同平行的单位向量是 _____.

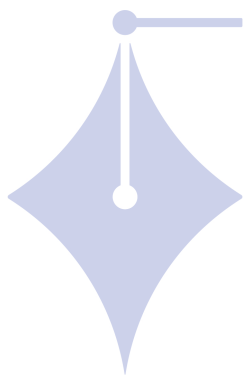
39. 微分方程 $y' + xy^2 = 0$ 的通解是 _____.

40. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$ 的收敛半径为 _____.

三、计算题（每小题 5 分，共 50 分）

41. 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{2}{x}}$

42. 求函数 $y = \sqrt{2 - \cos x}$ 的导函数.



43. 计算不定积分 $\int \frac{2 \ln x - 1}{x} dx$.

宏亮专升本
HONG LIANG EDUCATION

44. 计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$

45. 设直线 $L: \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 3x + 5y + 7z = 1 \end{cases}$, 求过点 $A(0,1,2)$ 且平行于直线 L 的直线方程.

46. 已知函数 $z=f(x, y)$ 由方程 $xz - yz - x + y=0$ 所确定, 求全微分 dz .

47. 已知 $D = \{(x, y) | 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$, 计算二重积分, $\iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2} dx dy$.



48. 求微分方程 $xy' + y - x = 0$ 的通解.

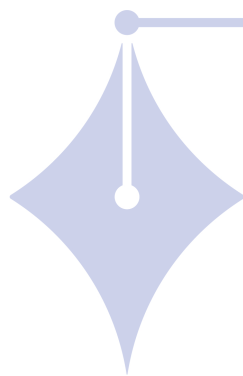
49. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^n}{n+1}$ 的收敛区间.

50. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n}$ 的和函数.

四、应用题 (每小题 6 分 , 共 12 分)

51. 求由直线 $x = 1$, $x = e$, $y = 0$ 及曲线 $y = \frac{1}{x}$ 所围成平面图形的面积.

52. 某工厂生产计算器, 若日产量为 x 台的成本函数为 $C(x) = 7500 + 50x - 0.02x^2$, 收入函数为 $R(x) = 80x - 0.03x^2$, 且产销平衡, 试确定日生产多少台计算器时, 工厂的利润最大?



五、证明题 (8 分)

53. 已知方程 $4x + 3x^3 - x^5 = 0$ 有一负根 $x = -2$, 证明方程 $4 + 9x^2 - 5x^4 = 0$ 必有一个大于 -2 的负根。

2015 年河南省普通高等学校
选拔优秀专科毕业生进入本科阶段学习考试
高等数学

题号	一	二	三	四	五	总分
分值	60	20	50	14	8	150

注意事项:

答题前, 考生务必将自己的姓名、考场号、座位号、考生号填写在答题卡上。

本卷的试题答案必须答在答题卡上, 答在卷上无效。

二. 选择题 (每小题 2 分, 共 60 分)

在每小题的四个备选答案中选出一个正确答案, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑, 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。

- 已知函数 $f(x) = x$, 则 $f\left[f\left(\frac{1}{x}\right)\right] = (\quad)$
 A. x B. x^2 C. $\frac{1}{x}$ D. $\frac{1}{x^2}$
- 已知函数 $f(x) = x^8 - x^4$, 则 $f(x)$ 是 $(\quad)$
 A. 奇函数 B. 偶函数 C. 非奇非偶函数 D. 无法判断
- 已知函数 $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$, 则 $f(x)$ 的定义域是 $(\quad)$
 A. $(0, +\infty)$ B. $[0, +\infty)$ C. $(-\infty, 0)$ D. $(-\infty, 0]$
- 已知极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(mx)}{x} = 2$, 则可确定 m 的值是 $(\quad)$
 A. 1 B. 2 C. $\frac{1}{2}$ D. 0
- 当 $x \rightarrow 0$ 时, 若 $2a - \cos x - \frac{1}{2}x^2$, 则可确定 a 的值一定是 $(\quad)$
 A. 0 B. 1 C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$
- 下列极限存在的是 $(\quad)$
 A. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x^2}$ B. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2^x - 1}$ C. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ D. $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x^2 + 2}{x}}$
- 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{a \sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$, 在 $x=0$ 处连续, 下列结论正确的是 $(\quad)$
 A. $a=1$ 时, $f(x)$ 必然连续 B. $a=0$ 时, $f(x)$ 必然连续
 C. $a=1$ 时, $f(x)$ 不连续 D. $a=-1$ 时, $f(x)$ 必然连续
- 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\sin^3 x}$ 的值是 $(\quad)$

- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{3}$ C. 0 D. ∞

9. 已知函数 $f(x) = (x-a)g(x)$ ，其中 $g(x)$ 在点 $x=a$ 处可导，则 $f'(a) = ()$

- A. 0 B. $g'(a)$ C. $g(a)$ D. $f(a)$

10. 已知曲线 $f(x) = x^2$ 与 $g(x) = x^3$ 当他们的切线相互垂直时，自变量 x 的值应为 $()$

- A. -1 B. $-\sqrt[3]{\frac{1}{6}}$ C. $-\frac{1}{6}$ D. $\sqrt[3]{\frac{1}{6}}$

11. 已知函数 $f(x) = |x|$ ，则该函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处 $()$

- A. 连续且可导 B. 不连续
C. 连续但不可导 D. 左右导数均不存在

12. 已知函数 $f(x) = \cos x$ 在闭区间 $[0, 2\pi]$ 上满足罗尔定理，那么再开区间 $(0, 2\pi)$ 内使得等式 $f'(\xi) = 0$ 成立的 ξ 值是 $()$

- A. $\frac{\pi}{2}$ B. π C. 0 D. 2π

13. 已知函数 $f(x)$ 在领域 $(-\delta, \delta)$ 内连续，当 $x \in (-\delta, 0)$ 时， $f'(x) < 0$ ，当 $x \in (0, \delta)$ 时， $f'(x) > 0$ ，则在领域 $(-\delta, \delta)$ 内 $()$

- A. $f(0)$ 是极小值 B. $f(0)$ 是极大值
C. $f(0)$ 不是极值 D. $f(0)$ 是最大值

14. 已知函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内有： $f'(x) < 0$ 且 $f''(x) > 0$ ，则在开区间 (a, b) 内，则 $f(x)$ 是 $()$

- A. 单调递减且形状为凸 B. 单调递增且形状为凸
C. 单调递减且形状为凹 D. 单调递增且形状为凹

15. 已知曲线 $y = 2 + x^5$ ，则该曲线的拐点 $(x, y) = ()$

- A. $(0, 2)$ B. $(1, 3)$ C. $(0, 0)$ D. $(-1, 1)$

16. 已知函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则不定积分 $\int f(2x)dx = ()$

- A. $\frac{1}{2}F(x) + C$ B. $\frac{1}{2}F(2x) + C$
C. $F(x) + C$ D. $F(2x) + C$

17. 已知函数 $f(x) = \int_0^x t \sin t dt$ ，则 $f'(x) = ()$

- A. $\sin x$ B. $x \cos x$
C. $-x \cos x$ D. $x \sin x$

18. 已知函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-a, a]$ 上连续，则 $\int_{-a}^a x^4 \sin x dx$ 定积 $()$

- A. -1 B. 0 C. 1 D. 不确定

19. 已知定积分 $I_1 = \int_0^1 x^2 dx$ ， $I_2 = \int_0^1 x^3 dx$ ，则有 $()$

- A. $I_1 > I_2$ B. $I_1 = I_2$ C. $I_1 < I_2$ D. 不确定

20. 已知函数 $y = f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，且 $f(x) \geq 0$ ，则有曲线 $y = f(x)$ 与直线 $x=a$ ， $x=b$ ， $y=0$ 所围成的平面图形的面积是 $()$

- A. $\int_a^b f(x) dx$ B. $\int_b^a f(x) dx$
C. $|f(b) - f(a)| (b-a)$ D. 不确定

21. 已知下列微分方程，则可进行分离变量的是 $()$

- A. $xy' - 3y = \sin x$ B. $(x - y \cos x) dy (y + x^2) dx = 0$
 C. $y' = \sin x \cos y$ D. $yy' - 4y - 2x = 0$

22. 已知微分方程 $y'' - 5y' + ay = 0$ 的一个解为 e^{2x} , 则常数 $a =$ ()

- A. 4 B. 3 C. 5 D. 6

23. 下列各组角中, 可以作为向量的一组方向角的是 ()

- A. $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$
 C. $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$

24. 已知函数 $z = 2x^2 + 3xy - y^2$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ ()

- A. -2 B. 2 C. 6 D. 3

25. 某公司要用铁板做成一个容积为 $27m^3$ 的有盖长方体水箱, 为使用料最省, 则该水箱的最小表面积为 ()

- A. $54m^2$ B. $27m^2$ C. $9m^2$ D. $6m^2$

26. 已知平面闭区域 $D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 16$, 则二重积分 $\iint_D 3dx dy =$ ()

- A. 45π B. 45 C. 48π D. 48

27. 已知 $\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y) dy$, 若将积分次序改变, 则 $\iint_D f(x, y) d\sigma =$ ()

- A. $\int_0^1 dy \int_{y^2}^1 f(x, y) dx$ B. $\int_0^1 dy \int_1^{y^2} f(x, y) dx$
 C. $\int_{y^2}^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx$ D. $\int_1^0 dy \int_{y^2}^1 f(x, y) dx$

28. 已知 L 为连接 $(1, 0)$ 及 $(0, 1)$ 两点的直线段, 则曲线积分 $\int_L (x + y) ds =$ ()

- A. 2 B. $\sqrt{2}$ C. 1 D. 0

29. 下列级数绝对收敛的是 ()

- A. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ B. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{3^{n-1}}$
 C. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{\pi}{n}$ D. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{n^2}}{n!}$

30. 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 则下列结论正确的是 ()

- A. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, 则收敛 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

B.若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{s_n\}$ 有界, 则收敛 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

C.若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛

D.若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散

二、填空题 (每小题 2 分, 共 20 分)

31. 已知函数 $f(x) = x-1$ 的反函数 $y =$ _____.

32. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3n^2+1} \sin \sqrt{n^2+1}$ _____.

33. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x+1 & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$, 则点 $x=1$ 是 $f(x)$ 的 _____ 间断点。

34. 已知函数 $f(x) = \ln x$ 为可导函数, 则 $f(x)$ 在点 $x = 1.01$ 处的近似值为 _____.

35. 不定积分 $\int \cos(3x+2)dx =$ _____.

36. 定积分 $\int_0^{\pi} \sin \frac{x}{2} dx$ _____.

37. 已知函数 $z = \ln(x^2 + y^2)$, 则全微分 $dz|_{(1,1)}$ _____.

38. 与向量 $\{-3, 4, 1\}$ 平行的单位向量是 _____.

39. 微分方程 $y' = e^{x-y}$ 的通解是 _____.

40. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)x^n$ 的收敛半径 $R =$ _____.

三、计算题 (每小题 5 分, 共 50 分)

32. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$

42. 已知函数 $f(x)$ 为可导函数, 且 $f(x) \neq 0$, 求函数 $y = \sqrt{f(x)}$ 的导数.

43. 计算不定积分 $\int \frac{x dx}{x^2 + 1}$

.

44. 计算定积分 $\int_0^1 \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} d\sqrt{x}$

.



45. 求过点 A (1,2,1)，且与直线 l: $\begin{cases} 2x - 4y + z = 0 \\ 3x - y - 2z = 0 \end{cases}$ 平行的直线方程.

宏亮专升本
HONG LIANG EDUCATION

46. 已知函数 $z = f(x, y)$ 由方程 $x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$ 所确定，求全微分 dz .

47. 计算二重积分 $\iint_D e^{x^2+y^2} dx dy$, 其中 D 是环形域 $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$.

48. 求微分方程 $y' + \frac{y}{x} = \frac{e^x}{x}$ 的通解.

49. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}$ 的收敛区间.

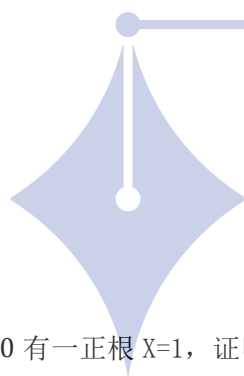
宏亮专升本
HONG LIANG EDUCATION

50. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ 的和函数.

四、应用题（每小题 7 分，共 14 分）

51. 计算由曲线 $x = 0$, $y = e^x$, $y = e$ 所围成的平面图形的面积.

52. 某公司主营业务是生产自行车，而且产销平衡，公司的成本函数 $C(x) = 40000 + 200x - 0.002x^2$ ，收入函数 $R(x) = 350x - 0.004x^2$ 则生产多少辆自行车时，公司的利润最大？



五、证明题（6 分）

53. 已知方程 $x^{11} - x^7 - x^3 + x = 0$ 有一正根 $x=1$ ，证明方程 $11x^{10} - 7x^6 - 3x^2 + 1 = 0$ 必有一个小于 1 的正根.

宏亮专升本
HONG LIANG EDUCATION

2014 年河南省普通高等学校
选拔优秀专科毕业生进入本科阶段学习考试
高等数学

题号	一	二	三	四	五	总分
分值	60	20	50	12	8	150

注意事项:

答题前,考生务必将自己的姓名、考场号、座位号、考生号填写在答题卡上。

本卷的试题答案必须答在答题卡上,答在卷上无效。

一、 选择题(每小题 2 分,共 60 分)

在每小题的四个备选答案中选出一个正确答案,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。

- 函数 $f(x) = \sin \sqrt{9-x^2} + \ln(x-1)$ 的定义域是 ()
A. $(1,3]$ B. $(1, +\infty)$ C. $(3, +\infty)$ D. $[-3,1)$
- 已知 $f(2x) = x^2 - 2x$, 则 $f(x) =$ ()
A. $\frac{1}{4}x^2 + 1$ B. $\frac{1}{4}x^2 - 1$ C. $\frac{1}{4}x^2 - x$ D. $\frac{1}{4}x + 1$
- 设 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 则 $g(x) = f(x) - f(-x)$ ()
A. 是偶函数 B. 是奇函数
C. 不是奇函数也不是偶函数 D. 是奇函数也是偶函数
- 已知 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax^2 + 4}{x - 2} = -4$, 则 ()
A. $a = -1$ B. $a = 0$ C. $a = 1$ D. $a = 2$
- $x = -1$ 是函数 $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - x - 2}$ 的 ()
A. 跳跃间断点 B. 可去间断点 C. 连续点 D. 第二类间断点
- 当 $x \rightarrow 0$ 时, 比 $1 - \cos x$ 高阶的无穷小是 ()
A. $\sqrt{x^2 + 1} - 1$ B. $\ln(1 + x^2)$ C. $\sin x$ D. $\arctan x^3$
- 已知 $f(x) = \ln x$, 则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(x+h) - f^2(x)}{2h} =$ ()
A. $-\frac{\ln x}{x^2}$ B. $\frac{\ln x}{x}$ C. $-\frac{1}{x^2}$ D. $\frac{1}{x}$
- 曲线 $\begin{cases} y = \sin t \\ x = 2\cos t \end{cases}$ (t 为参数), 在 $t = \frac{\pi}{2}$ 对应点处切线的方程为 ()
A. $x = 1$ B. $y = 1$ C. $y = x + 1$ D. $y = x - 1$
- 函数 $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$, 则方程 $f'(x) = 0$ 实根的个数为 ()
A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

10. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $y = xy + e^x$ 确定的隐函数, 则 $\frac{dy}{dx} = (\quad)$

A. $\frac{1+x-y}{1-x}$

B. $\frac{2y-xy}{1-x}$

C. $\frac{1+y}{1-x}$

D. $-\frac{1-x}{2x-xy}$

11. 已知函数 $f(x)$ 在区间 $[0, a]$ ($a>0$) 上连续, $f(0)>0$ 且 $(0, a)$ 上恒有 $f'(x)>0$, 设 $s_1 = \int_0^a f(x) dx$, $s_2 = af(0)$, s_1 与 s_2 的关系是 $(\quad)$

A. $s_1 < s_2$

B. $s_1 = s_2$

C. $s_1 > s_2$

D. 不确定

12. 曲线 $y = x^3 + 1$ $(\quad)$

A. 无拐点

B. 有一个拐点

C. 有两个拐点

D. 有三个拐点

13. 曲线 $y = \frac{1}{x-2}$ 的渐近线的方程为 $(\quad)$

A. $x=0, y=1$

B. $x=1, y=0$

C. $x=2, y=1$

D. $x=2, y=0$

14. 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数则 $\int e^{-x} f(e^{-x}) dx = (\quad)$

A. $-F(e^x) + c$

B. $-F(e^{-x}) + c$

C. $F(e^x) + c$

D. $F(e^{-x}) + c$

15. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则由曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=a, x=b, y=0$ 所围成平面图形的面积为 $(\quad)$

A. $\int_a^b f(x) dx$

B. $|\int_a^b f(x) dx|$

C. $\int_a^b |f(x)| dx$

D. $|f(b) - f(a)| (b-a)$

16. 设 $f(x)$ 是连续函数, 满足 $f(x) = \frac{1 + \sin x}{1 + x^2} - \int_{-1}^1 f(x) dx$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = (\quad)$

A. 0

B. $-\frac{\pi}{6}$

C. $\frac{\pi}{3}$

D. $\frac{\pi}{6}$

17. 设 $f(x) = \int_0^x (t-1) \sin t dt$, 则 $f'(x) = (\quad)$

A. $\sin x + x \cos x$

B. $(x-1) \cos x$

C. $\sin x - x \cos x$

D. $(x-1) \sin x$

18. 下列广义积分收敛的是 $(\quad)$

A. $\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$

B. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

C. $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$

D. $\int_1^{+\infty} \cos x dx$

19. 微方程 $\frac{dx}{y} + \frac{dy}{x} = 0$ 的通解是 $(\quad)$

A. $x^2 + y^2 = 25$

B. $3x+4y=c$

C. $x^2 + y^2 = c$

D. $y^2 - x^2 = 7$

20. 解常微方程 $y'' - 2y' + y = xe^x$ 的过程中, 特解一般应设为 $(\quad)$

A. $y^* = (Ax^2 + Bx)e^x$

B. $y^* = Axe^x$

C. $y^* = Ae^x$

D. $y^* = x^2 e^x (Ax + B)$

21. 已知 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 为非零向量, 且 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{0}$, $\vec{b} \times \vec{c} = \vec{0}$ 则 $(\quad)$

A. $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 且 $\vec{b} \perp \vec{c}$

B. $\vec{a} \perp \vec{b}$ 且 $\vec{b} \parallel \vec{c}$

C. $\vec{a} \parallel \vec{c}$ 且 $\vec{b} \perp \vec{c}$

D. $\vec{a} \perp \vec{c}$ 且 $\vec{b} \parallel \vec{c}$

22. 直线 $L: \frac{x}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{5}$ 与平面 $\pi: 6x - 4y + 10z - 1 = 0$ 的位置关系是 ()

A. L 在 π 上

B. L 在 π 平行但无公共点

C. L 在 π 相交但不垂直

D. L 在 π 垂直

23. 在空间直角坐标系内, 方程 $2x^2 - y^2 = 1$ 表示的二次曲面是 ()

A. 球面

B. 双曲抛物面

C. 圆锥面

D. 双曲柱面

24. 极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2xy}{\sqrt{xy+1} - 1} = ()$

A. 0

B. 4

C. $\frac{1}{4}$

D. $-\frac{1}{4}$

25. 点 (0,0) 是函数 $z=xy$ 的 ()

A. 驻点

B. 极值点

C. 最大值点

D. 间断点

26. 设 $D = \{(x,y) | |x| \leq 2, |y| \leq 1\}$ 则 $\iint_D (xy + y) dx dy = ()$

A. 0

B. -1

C. 2

D. 1

27. 设 $f(x, y)$ 为连续函数, $\int_0^1 dx \int_0^x f(x,y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y) dy$ 交换积分次序后得到 ()

A. $\int_0^1 dy \int_{\frac{y}{2}}^y f(x,y) dx$

B. $\int_0^2 dy \int_0^y f(x,y) dx$

C. $\int_0^1 dy \int_y^{2-y} f(x,y) dx$

D. $\int_2^0 dy \int_{\frac{y}{2}}^y f(x,y) dx$

28. L 为从点 (0,0) 经点 (0,1) 到点 (1, 1) 的折线, 则 $\int_L x^2 dy + y dx = ()$

A. 1

B. 2

C. 0

D. -1

29. 下列级数条件收敛的是 ()

A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2+1}$

B. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3^n}$

C. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}$

D. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$

30. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ 的和是 ()

A. 1

B. 2

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{1}{4}$

二、填空题 (每题 2 分, 共 20 分)

31. 设 $f\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{x}{x-1} (x \neq 0, 1)$, 则 $f(x) =$ _____.

32. 设连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = x^2 - \int_0^2 f(x) dx$, 则 $\int_0^2 f(x) dx =$ _____.

33. 已知 $f(x) = \begin{cases} x-a, & x < 1 \\ \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$, 若函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 连续, $a=$ _____.

34. 设 $f'(x^3+1) = 1+2x^3$ 且 $f(0) = -1$, 则 $f(x) =$ _____.

35. 不定积分 $\int \cos 2x dx =$ _____.

36. 若向量 $\vec{a} = \{0, 1, 1\}; \vec{b} = \{1, 0, 1\}; \vec{c} = \{1, 1, 0\}$, 则 $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} =$ _____.

37. 微分方程 $y'' - 4y' + 4y = 0$ 的通解 $y(x) =$ _____.

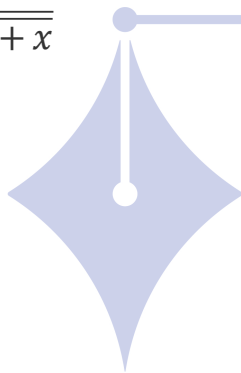
38. 设 $f(x, y) = e^{\arctan \frac{y}{x}} \ln(x^2 + y^2) \cos xy^2$, 则 $f_x(1, 0) =$ _____.

39. 函数 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处方向导数的最大值为_____.

40. 函数 $f(x) = \frac{1}{1-2x}$ 的幂级数展开式是_____.

三、计算机 (每题 5 分, 共 50 分)

41. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(e^x - 1)}{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + x}}$



宏亮专升本

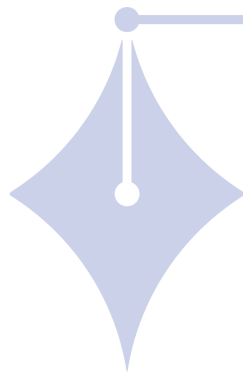
HONG LIANG EDUCATION

42. 设 a_n 为曲线 $y = x^n$ 与 $y = x^{n+1}$ ($n = 1, 2, 3, 4, \dots$) 所围的面积, 判定级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} a_n$ 的敛散性.

43. 求不定积分 $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2-1}}$.

44. 计算定积分 $\int_0^4 |x-2| dx$.



45. 解微分方程 $xy' - y = x^3$.

宏亮专升本
HONG LIANG EDUCATION

46. 已知函数 $z=f(x, y)$ 由方程 $e^{-xy} - 2z + e^z = 0$ 所确定, 求 dz .

47. 已知点 A (4, -1, 2), B (1, 2, -2), C (2, 0, 1) 求 $\triangle ABC$ 的面积.

48. 计算二重积分 $\iint_D \ln \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, 其中 $\{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.

49. 计算曲线积分 $\oint_L y(1 + x^2)dx + x(1 - y^2)dy$ 其中 L 是圆周 $x^2 + y^2 = 1$ (逆时针方向)

50. 试确定幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的收敛域并求出和函数.

四、应用题 (每小题 7 分, 共 14 分)

51.欲围一个面积 150 平方米的矩形场地，所用材料的造价其正面每平方米 6 元，其余三面是每平方 3 元，问场地的长，宽各多少时，才能使造价最低？

52.已知 D 是抛物线 $L: y^2 = 2x$ 和直线 $x = \frac{1}{2}$ 所围成的平面区域，试求：

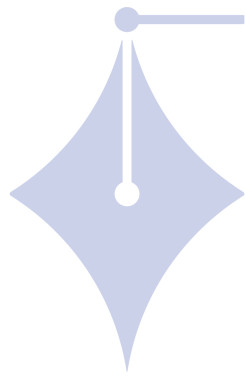
- (1) 区域 D 的面积.
- (2) 区域 D 绕 ox 轴旋转形成空间旋转体体积.



宏亮专升本
HONG LIANG EDUCATION

五、证明题（6分）

53.设 $e < a < b < e^2$ 证明 $\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b - a)$.



宏亮专升本
HONG LIANG EDUCATION

2013 年河南省普通高等学校
选拔优秀专科毕业生进入本科阶段学习考试
高等数学

题号	一	二	三	四	五	总分
分值	60	20	50	12	8	150

注意事项:

答题前, 考生务必将自己的姓名、考场号、座位号、考生号填写在答题卡上。

本卷的试题答案必须答在答题卡上, 答在卷上无效。

三. 选择题 (每小题 2 分, 共 60 分)

在每小题的四个备选答案中选出一个正确答案, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑, 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。

- 函数 $y = \frac{\arcsin(1-x)}{\sqrt{x-1}}$ 的定义域 ()
A. $[0, 2]$ B. $(1, +\infty)$ C. $(1, 2]$ D. $[1, 2]$
- 设 $f(x) = \frac{1}{1-x}$, 那么 $f\{f[f(x)]\} = ()$
A. $\frac{1}{x}$ B. $\frac{1}{x-1}$ C. $\frac{1}{1-x^2}$ D. x
- 函数 $y = \frac{1}{\ln(\sqrt{1+x^2}-x)}$ $(-\infty < x < +\infty)$ 是 ()
A. 偶函数 B. 奇函数 C. 非奇非偶函数 D. 既奇又偶函数
- 设 $f(x) = \frac{\sin 2x}{x}$, 则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的 ()
A. 连续点 B. 可去间断点 C. 跳跃间断点 D. 无穷间断点
- 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列无穷小量中与 $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$ 等价的是 ()
A. x B. $2x$ C. x^2 D. $2x^2$
- 已知 $f'(0) = a, g'(0) = b$, 且 $f(0) = g(0)$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - g(-x)}{x} = ()$
A. $a-b$ B. $2a+b$ C. $a+b$ D. $b-a$
- 曲线 $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} (a > 0, b > 0)$, 则 $t = \frac{\pi}{4}$ 对应点处的法线斜率 ()
A. $\frac{b}{a}$ B. $\frac{a}{b}$ C. $-\frac{b}{a}$ D. $-\frac{a}{b}$

8. 设 $f'(x) = g(x)$, 则 $df(\sin^2 x) =$ ()
- A. $2g(x)\sin x dx$ B. $g(x)\sin 2x dx$ C. $g(\sin 2x) dx$ D. $g(\sin^2 x)\sin 2x dx$
9. 设函数 $f(x)$ 具有任意阶导数, 且 $f'(x) = [f(x)]^2$, 则 $f^{(n)}(x) =$ ()
- A. $n![f(x)]^{n+1}$ B. $n[f(x)]^{n+1}$ C. $(n+1)[f(x)]^{n+1}$ D. $(n+1)![f(x)]^{n+1}$
10. 由方程 $xy = e^{x+y}$ 确定的隐函数 $x(y)$ 的导数 $\frac{dx}{dy} =$ ()
- A. $\frac{x(y-1)}{y(1-x)}$ B. $\frac{y(x-1)}{x(1-y)}$ C. $\frac{y(x+1)}{x(y-1)}$ D. $\frac{x(y+1)}{y(x-1)}$
11. 若 $f''(x) > 0 (0 < x < a)$, 且 $f(0) = 0$, 则下面成立的是 ()
- A. $f'(x) > 0$ B. $f'(x)$ 在 $[0, a]$ 上单调增加
- C. $f(x) > 0$ D. $f(x)$ 在 $[0, a]$ 上单调增加
12. 点 $(0, 1)$ 是曲线 $y = x^3 + bx^2 + c$ 的拐点, 则 ()
- A. $b = 0, c = 1$ B. $b = -1, c = 0$ C. $b = 1, c = 1$ D. $b = -1, c = 1$
13. 曲线 $y = 1 + \frac{x+2}{x^2-x-6}$ 的垂直渐近线共有 ()
- A. 1 条 B. 2 条 C. 3 条 D. 4 条
14. 函数 $f(x) = e^x - e^{-x}$ 的一个原函数是 ()
- A. $F(x) = e^x - e^{-x}$ B. $F(x) = e^x + e^{-x}$
- C. $F(x) = e^{-x} - e^x$ D. $F(x) = -e^x - e^{-x}$
15. 若 $f'(x)$ 连续, 则下列等式正确的是 ()
- A. $\int df(x) = f(x)$ B. $d \int f(x) dx = f(x)$
- C. $\int f'(x) dx = f(x)$ D. $d \int f(x^2) dx = f(x^2) dx$
16. $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin x dx =$ ()
- A. π B. $-\pi$ C. 1 D. 0

17. 设 $\int_1^{2+x} f(t)dt = xe^{2+x}$, 则 $f'(x) = (\quad)$

- A. xe^x B. $(x-1)e^x$ C. $(x+2)e^x$ D. xe^{x+2}

18. 下列广义积分收敛的是 ()

- A. $\int_1^{-\infty} \frac{dx}{x}$ B. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ C. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ D. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln^3 x dx}{x}$

19. 微分方程 $(y')^2 + (y'')^2 y + y = 0$ 的阶数是 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

20. 微分方程 $dy - 2xy^2 dx = 0$ 满足条件 $y(1) = -1$ 的特解是 ()

- A. $y = \frac{1}{x^2}$ B. $y = -\frac{1}{x^2}$ C. $y = x^2$ D. $y = -x^2$

21. 下列各组角中, 可以作为向量的方向角的是 ()

- A. $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$
C. $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$

22. 直线 $L: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-4}{1}$ 与平面 $\pi: 2x-3y+z-4=0$ 的位置关系为 ()

- A. L 在 π 上 B. L 与 π 垂直相交
C. L 与 π 平行 D. L 与 π 相交, 但不垂直

23. 下列方程在空间直角坐标系中所表示的图形为柱面的是 ()

- A. $\frac{x^2}{7} + \frac{z^2}{3} = y^2$ B. $z-1 = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}$

- C. $\frac{x^2}{4} = 1 - \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{9}$ D. $x^2 + y^2 - 2x = 0$

24. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2 - \sqrt{xy+4}}{xy} = (\quad)$

- A. 0 B. 1 C. $-\frac{1}{4}$ D. 不存在

25. 设 $z = f(x^2 - y^2, 2x + 3y)$, 则 $\frac{\partial z}{\partial y} = (\quad)$

- A. $2yf_1' + 3f_2'$ B. $-2yf_1' + 3f_2'$ C. $2xf_1' + 2f_2'$ D. $2xf_1' - 2f_2'$

26. 设 $I = \int_0^2 dx \int_0^{\frac{x^2}{2}} f(x, y) dy + \int_2^{2\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{8-x^2}} f(x, y) dy$, 则交换积分次序后, I 可以化为 ()

- A. $\int_0^2 dy \int_{\sqrt{2y}}^{\sqrt{8-y^2}} f(x, y) dx$ B. $\int_0^2 dy \int_{\frac{x^2}{2}}^{\sqrt{8-x^2}} f(x, y) dx$
C. $\int_0^{2\sqrt{2}} dy \int_{\frac{x^2}{2}}^{\sqrt{8-x^2}} f(x, y) dx$ D. $\int_0^2 dy \int_2^{2\sqrt{2}} f(x, y) dx$

27. 积分 $\int_0^1 dx \int_1^2 x^2 y dy =$ ()

- A. 2 B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 0

28. 设 L 是抛物线 $x = y^2$ 上从 $O(0, 0)$ 到 $A(1, 1)$ 的一段弧, 则曲线积分 $\int_L 2xy dx + x^2 dy =$ ()

- A. 0 B. 2 C. 4 D. 1

29. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n$ 的收敛区间为 ()

- A. $(0, 1)$ B. $(-\infty, +\infty)$ C. $(-1, 1)$ D. $(-1, 0)$

30. 下列级数收敛的是 ()

- A. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1}$ B. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{n})$ C. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$ D. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

二、填空题 (每题 2 分, 共 30 分)

31. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 有定义是极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在 _____ 条件.

32. 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \frac{3}{x})^{px} = e^{-2}$, 则 $p =$ _____.

33. 函数 $f(x) = \begin{cases} e^{ax} - a, & x \leq 0 \\ a \cos 2x + x, & x > 0 \end{cases}$ 是连续函数, 则 $a =$ _____.

34. 设函数 $f(\frac{1}{x^2}) = x^4$, 则 $f'(x) =$ _____.

35. 不定积分 $\int \frac{2 + \cos x}{2x + \sin x} dx =$ _____.

36. 向量 $a = \{1, 0, 1\}$ 与向量 $b = \{-1, 1, 0\}$ 的夹角是_____.

37. 微分方程 $y' + y - x = 0$ 的通解是_____.

38. 设方程 $x + 2y + z - 2xyz = 0$ 所确定的隐函数为 $z = z(x, y)$, 则

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{\substack{x=0 \\ y=1}} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

39. 曲面 $z = x^2 + y^2$ 在点 $(1, 2, 5)$ 处的切平面方程是_____.

40. 将 $f(x) = \frac{1}{x}$ 展开成 $(x-4)$ 的幂级数是_____.

三、计算题 (每小题 5 分, 共 50 分)

41. $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right].$

42. 已知函数 $x = x(y)$ 由方程 $\arctan \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ 所确定, 求 $\frac{dx}{dy}$.

43. 求不定积分 $\int \arctan \sqrt{x} dx$.

44. 设 $f(x) = \begin{cases} 1+x^2, & x \leq 0 \\ e^x, & x > 0 \end{cases}$ 求 $\int_1^3 f(x-2)dx$.

45. 求微分方程 $2y'' + y' - y = 3e^x$ 的通解.

46. 设 $u = x^2 + \sin 2y + e^{xy}$, 求全微分 du .

47. 一平面过点 $(1, 0, -1)$ 且平行于向量 $a = \{2, 1, -1\}$ 和 $b = \{1, -1, 2\}$, 求此平面的方程.

48. 计算 $\iint_D e^{\frac{x}{y}} dx dy$, 其中 D 是由 $y=1, y=x, y=2, x=0$ 所围成的闭区域.

49. 计算积分 $\int_L (x^2 + 2xy - y^2 + 10)dx + (x^2 - 2xy - y^2 + 15)dy$, 其中 L 为曲线 $y=\cos x$ 上从点 $A(\frac{\pi}{2}, 0)$ 到点 $B(-\frac{\pi}{2}, 0)$ 的一段弧.

50. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n(n+1)}$ 的收敛域.

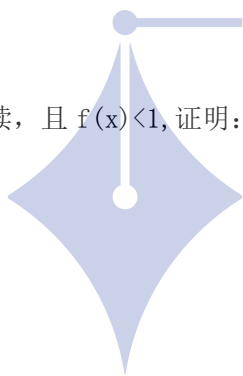
四、应用题（每题 6 分，共计 12 分）

51. 某房地产公司有 50 套公寓要出租，当月租金定为 2000 元时，公寓会全部租出去，当月租金每增加 100 元时，就会多一套公寓租不出去，而租出去的公寓每月需花费 200 元的维修费，试问租金定为多少可获得最大收入？最大收入是多少？

52. 曲线 $y = x^3 (x \geq 0)$, 直线 $x+y=2$ 以及 y 轴围成一平面图形 D , 试求平面图形 D 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积.

五、证明题 (8 分)

53. 设 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 且 $f(x) < 1$, 证明: 方程 $2x - \int_0^x f(t)dt = 1$ 在区间 $(0, 1)$ 内有且仅有一个实根.



宏亮专升本
HONG LIANG EDUCATION

2018 年河南省普通高等学校
选拔优秀专科毕业生进入本科阶段学习考试
高等数学 参考答案

一、选择题（每小题 2 分，共 60 分）

1.B 【解析】 $4-x^2 > 0 \Rightarrow x \in (-2, 2)$, 故选 B.

2.A 【解析】 $\sin x, e^x - e^{-x}$ 都是奇函数，两个奇函数之积为偶函数. 故选 A.

3.B 【解析】根据有理分式函数求无穷大时的极限结论知，所求极限值为最高次项系数之比
故选 B.

4.C 【解析】 $x \rightarrow 0, (1+x^2)^k - 1 - kx^2, 1 - \cos x - \frac{1}{2}x^2$, 根据等价无穷小传递性，有 $k = \frac{1}{2}$, 选 C.

5.B 【解析】 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x-2} = -2$ ，但函数在 $x=1$ 处无定义，故为可去间断点，选 B.

6.C 【解析】 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导时，四个选项中极限都存在，且都等于 $f'(a)$;

对于 A 选项，如函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq a \\ 0, & x = a \end{cases}$, 在 $x=a$ 处不连续不可导，但

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1-1}{h} = 0 \text{ 存在;}$$

对于 B 选项，如函数 $f(x) = |x-a|$, 在 $x=a$ 处不可导，但

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h| - |h|}{2h} = 0 \text{ 存在;}$$

对于 C 选项, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a) - f(a-h)}{h} = \lim_{-h \rightarrow 0} \frac{f(a-h) - f(a)}{-h}$ 就是导数的定义, 即有

$f(x)$ 在 $x=a$ 处可导, 应选 C.

对于 D 选项, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(a + \frac{1}{h}\right) - g - f(a)}{\frac{1}{h}} = \lim_{\frac{1}{h} \rightarrow 0} \frac{f\left(a + \frac{1}{h}\right) - f(a)}{\frac{1}{h}} = f'_+(a)$, 不能确定 $f(x)$ 在 $x=a$

处可导, 也是错误的.

7.A 【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \arctan \frac{1}{x} - \frac{\arctan x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} x \arctan \frac{1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 0 - 1 = -1$, 故选 A

8.D 【解析】 $y = x \ln x, y' = \ln x + 1, y'' = \frac{1}{x}, y''' = -\frac{1}{x^2}$, 故选 D.

9.B 【解析】 $z = (2y+1)^x$, 把 x 看成常数, 利用幂函数求导公式有 $\frac{\partial z}{\partial y} = 2x(2y+1)^{x-1}$, 故选 B

10.A 【解析】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 + x - 2} = 1$, 所以水平渐近线为 $y = 1$, 故选 A.

11.C 【解析】 根据不定积分的性质, $\int f'(x) dx = f(x) + C$, 故选 C.

12.D 【解析】 $\int x f(1-x^2) dx = -\frac{1}{2} \int f(1-x^2) d(1-x^2) = -\frac{1}{2} (1-x^2)^3 + C$, 故选 D

13.A 【解析】 $\frac{d}{dx} \int_0^{e^x} (1+t^2) dt = (1+e^{2x})(ex)' = (1+e^{2x})e^x$, 故选 A.

14.A 【解析】 $x \in [0, 1], x > x^2 \Rightarrow \int_0^1 x dx > \int_0^1 x^2 dx$, 故选 A.

15.B 【解析】 四个广义积分都是 $\mathbf{P}$ 广义积分, 只有选项 B 中广义积分 $p = \frac{3}{2} > 1$ 是收敛的, 故选 B.

16.C 【解析】 $a = \{2, -3, 1\}, b = \{1, -1, 3\}, \cos(a, b) = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{8}{\sqrt{154}}$, 故选 C.

17.A 【解析】 绕 z 轴旋转, z 不动, y 用 $\pm \sqrt{x^2 + y^2}$ 代替, 即 $z = (\pm \sqrt{x^2 + y^2})^2 = x^2 + y^2$, 故选 A.

18.D 【解析】 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)e^{(x^2 + y^2)}} \stackrel{x^2 + y^2 = t}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{te^t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{2te^t} = 0$, 故选 D.

19.A 【解析】 由可微的必要条件和充分条件可知, 选 A.

20.D 【解析】 将 X 型区域转化成 Y 型区域, $\left\{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq 9, \frac{y}{3} \leq x \leq \sqrt{y} \right\}$, 则可化为 $\int_0^9 dy \int_{\frac{y}{3}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$, 故选 D.

21.A【解析】 $L: \begin{cases} y=x \\ x=x \end{cases} (0 \leq x \leq \sqrt{2})$, $\int_L \sqrt{y} ds = \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{(2x^2)+1^2} dx = \int_0^{\sqrt{2}} x \cdot \sqrt{4x^2+1} dx$

$$= \frac{1}{8} \int_0^{\sqrt{2}} (4x^2+1)^{\frac{1}{2}} d(4x^2+1) = \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} (4x^2+1)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{13}{6}. \text{ 故选 A}$$

22.B【解析】级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na)}{n^2}$ 收敛, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散, 由级数的性质知, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\sin(na)}{n^2} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right] \text{ 发散, 故选 B.}$$

23.A【解析】令 $x-1=t$, 级数化为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$, 在 $x=-1$ 处原级数条件收敛, 即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$

在 $t=-2$ 处条件收敛, $x=2$ 就是 $t=1$, 根据阿贝尔定理知, $t=1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$ 绝对收敛, 即 $x=2$ 时原级数绝对收敛, 故选 A.

24.D【解析】 y_1, y_2, y_3 是非齐次线性微分方程 $y'' + p(x)y' = \varphi(x)$ 三个线性无关的解, 则 $(y_1 - y_3)(y_2 - y_3)$ 为对应齐次方程的两个无关特解, 而 y_3 为非齐次线性微分方程的特解, 故非齐次线性微分方程通解为 $C_1(y_1 - y_3) + C_2(y_2 - y_3) + y_3$, 故选 B.

25.B【解析】导数的最高阶为 2, 故方程的阶数为 2, 故选 B.

26.C【解析】平面法向量与直线方向向量相等, 故直线与平面垂直, 故选 C.

27.A【解析】特征方程有两个根 $r_1=1, r_2=2, \lambda=2$ 是特征方程的单根, 所以 $k=1$, 故特解 y^* 设为 $y^* = x(Ax+B)e^{2x}$, 故选 A.

28.D【解析】 $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 3x^2 + 2axy, \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = 3x^2 + 16xy$, 因为曲线积分在整个 xoy 平

面内与路无关, 则 $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \Rightarrow 3x^2 + 2axy = 3x^2 + 16xy \Rightarrow a=8$, 故选 D.

29.A【解析】特征方程的两个根为 $r_1=1, r_2=3$, 由根与系数之间的关系知, $p=-5, q=6$, 故对应的二阶常系数齐次线性微分方程是 $y'' - 5y' + 6y = 0$, 故选 A.

30.D【解析】 $f'(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\xi}} = \frac{f(4)-f(1)}{4-1} = \frac{1-0}{3} \Rightarrow \xi = \frac{9}{4}$, 故选 D.

二、填空题 (每小题 2 分, 共 20 分)

31. 【解析】由 $f(x) = e^x$ 得 $f[\varphi(x)] = e^{\varphi(x)}$, 所以有 $e^{\varphi(x)} = 1 + 2x$, 故 $\varphi(x) = \ln(1 + 2x)$ ($x > 0$).

32. 【解析】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3+x}{2+x} \right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{2+x} \right)^{(x+2)} \right]^{\frac{2x}{x+2}} = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2+x} \right)^{(x+2)} \right]^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x+2}} = e^2$

33. 【解析】函数在 $x=0$ 处连续, 则该点处左右极限存在且相等, 还等于该点处的函数值, 而 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (ae^x + 1) = a + 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 2) = 2$, 所以 $a + 1 = 2$, 即 $a = 1$.

34. 【解析】 $dy = (x \sin x)' dx = (\sin x + x \cos x) dx$.

35. 【解析】在 $T=1$ 对应的点为 $(1, 2, 3)$, 该点处曲线的切向量, 即法平面的法向量为 $n = \{1, 2t, 3t^2\}_{t=1} = \{1, 2, 3\}$, 故该点处的法平面方程为 $1 \cdot (x - 1) + 2 \cdot (y - 2) + 3 \cdot (z - 3) = 0$, 即 $x + 2y + 3z - 6 = 0$.

36. 【解析】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + e^2)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{1 + e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{e^x} + 1} = 1$.

37. 【解析】 $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + c$.

38. 【解析】 $\int_{-1}^1 (x^2 + x \cos x) dx = \int_{-1}^1 x^2 dx + \int_{-1}^1 x \cos x dx = 2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$.

39. 【解析】 $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$, 则 $f'_x(x, y, z) = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$, $f'_y(x, y, z) = \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}$, $f'_z(x, y, z) = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2}$. 故

$\text{grad} f(1, 1, 1) = \left\{ \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} \right\} \Big|_{(1, 1, 1)} = \frac{1}{3} \{1, 1, 1\}$, 也可填

$\frac{1}{3}i + \frac{1}{3}j + \frac{1}{3}k$.

40. 【解析】 $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot 3^{1-n} = 3 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n = 3 \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 9$.

三、计算题 (每小题 5 分, 共 40 分)

41. 【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^2(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^2 \cdot x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}.$

42. 【解析】 因为 $\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\sin t}{1 - \cos t},$

所以 $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{1}{x'_t} = \left(\frac{\sin t}{1 - \cos t} \right)' \cdot \frac{1}{2(1 - \cos t)} = \frac{\cos t(1 - \cos t) - \sin^2 t}{(1 - \cos t)^2} \cdot \frac{1}{2(1 - \cos t)}$
 $= \frac{\cos t - 1}{2(1 - \cos t)^3} = -\frac{1}{2(1 - \cos t)^2}.$

43. 【解析】 令 $\sqrt{x-1} = t$, 则 $x = 1 + t^2, dx = 2tdt,$

所以 $\int x\sqrt{x-1}dx = \int (1+t^2) \cdot 2tdt = 2 \int (t^2 + t^4)dt = 2 \left(\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 \right) + C$
 $= \frac{2}{3}(\sqrt{x-1})^3 + \frac{2}{5}(\sqrt{x-1})^5 + C.$

44. 【解析】 $\int_1^{e^2} \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}} dx = \int_1^{e^2} \frac{1}{\sqrt{1+\ln x}} d(1+\ln x) = 2\sqrt{1+\ln x} \Big|_1^{e^2} = 2(\sqrt{3}-1)$

45. 【解析】 这是二阶常系数齐次线性微分方程, 其特征方程为 $r^2 - 6r + 9 = 0$, 对应的特征根为 $r_1 = r_2 = 3$. 故所求方程的通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^{3x}.$

46. 【解析】 令 $\begin{cases} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x - 2 = 0 \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2y + 2 = 0 \end{cases}$, 得唯一驻点 $(1, -1)$; 在驻点 $(1, -1)$ 处有:

$A = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 2, B = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = 0, C = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 2$, 且 $B^2 - AC < 0, A > 0$; 故点 $(1,$

$-1)$ 为 $f(x,y)$ 的极小值点, 且极小值 $f(1,-1) = -2$, 无极大值.

47. 【解析】 令 $x-1=t$ 则 $x=1+t$, 所以

$$f(x) = \ln(2+x) = \ln(2+t+1) = \ln 3 + \ln \left(1 + \frac{t}{3} \right);$$

$$\text{而 } \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (-1 < x \leq 1);$$

$$\text{故 } \ln(2+x) = \ln 3 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{t}{3}\right)^{n+1}}{n+1} \quad (-1 < \frac{t}{3} \leq 1)$$

$$= \ln 3 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{3^{n+1} \cdot (n+1)} \quad (-2 < x \leq 4).$$

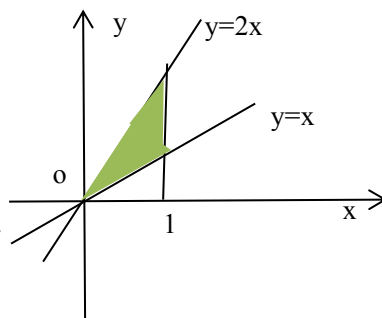
48. 【解析】积分区域 D 如图所示：

把 D 看作 X 型区域，

可表示为 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 2x\}$ ，

$$\text{故 } \iint_D y dx dy = \int_0^1 dx \int_x^{2x} y dy = \int_0^1 \frac{(2x)^2 - (x)^2}{2} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{3x^2}{2} dx = \frac{1}{2} x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$



49. 【解析】函数 $y = 3x^4 - 4x^3 + 2$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$ ，且 $y' = 12x^3 - 12x^2$ ，

$y'' = 36x^2 - 24x = 12x(3x - 2)$ ，令 $y'' = 0$ ，得 $x = \frac{2}{3}$ ，把定义域分为三个

区间，列表如下：

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \frac{2}{3})$	$\frac{2}{3}$	$(\frac{2}{3}, +\infty)$
y'' 符号	+	0	-	0	+
的变化	$\cup$	2	$\cap$	$\frac{38}{27}$	$\cup$

故，所求函数的凸区间为 $(0, \frac{2}{3})$ ，凹区间为 $(-\infty, 0)$ 和 $(\frac{2}{3}, +\infty)$ ；

拐点为 $(0, 2)$ ， $(\frac{2}{3}, \frac{38}{27})$ 。

50. 【解析】由于 $\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy} - \sin(x+y)$ ， $\frac{\partial z}{\partial y} = xe^{xy} - \sin(x+y)$ ，在定义域内为连续函

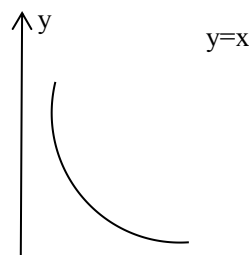
数，由全微分存在的充分条件可知 dz 存在，且

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = [ye^{xy} - \sin(x+y)]dx + [xe^{xy} - \sin(x+y)]dy.$$

$$\text{【解法二】 } dz = de^{xy} + d \cos(x+y) = e^{xy}[xdy + ydx] - \sin(x+y)[dx + dy]$$

$$= [ye^{xy} - \sin(x+y)]dx + [xe^{xy} - \sin(x+y)]dy.$$

四、应用题（每题 7 分，共 14 分）



51. 【解析】平面图形如图所示：

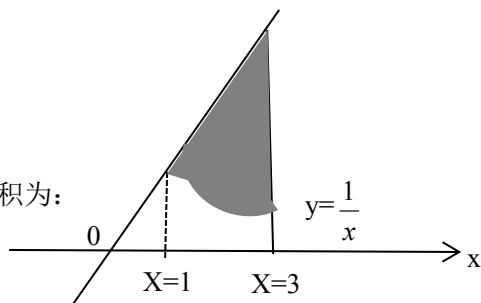
把区域 D 看作 X 型区域，

取 X 为积分变量，且 $x \in [1, 3]$ ，

平面图形 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积为：

$$V_x = \pi \int_1^3 \left(x^2 - \frac{1}{x^2} \right) dx$$

$$= \pi \left(\frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{x} \right) \Big|_1^3 = 8\pi$$



52. 【解析】设长方形的正面长为 x ，侧面长为 y 时，面积为 S ，则 $S = xy$ 且 $2y + x = 20$ 即

$S = y(20 - 2y)$ ，则令 $S' = 20 - 4y = 0$ ，则唯一可能的极值点 $y = 5$ ，而此时 $S'' = -4 < 0$ ，

所以 $y = 5$ 是极大值点，即为最大值点，此时 $x = 10$ ，

故，长方形小屋的长为 10 米，宽为 5 米时小屋面积最大。

五、证明题（每题 6 分，共 6 分）

53. 【证明】函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 都满足拉格朗日中值定理，

所以 $\exists \xi_1 \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \exists \xi_2 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ ，使得

$$f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0)}{\frac{1}{2} - 0} = 2f\left(\frac{1}{2}\right), \quad f'(\xi_2) = \frac{f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - 2f\left(\frac{1}{2}\right),$$

两式相加得 $f'(\xi) + f'(\eta) = 1$ ；

故，在两个不同点 $\xi_1, \xi_2 \in (0, 1)$ ，使得 $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 1$ 成立。

**2017 年河南省普通高等学校
选拔优秀专科毕业生进入本科阶段学习考试
高等数学 参考答案**

一、选择题（每题 2 分，共计 60 分）

1-5: BCABA

6-10: BAABC

11-15: ADAAB

16-20: DCDDC

21-25: BBDBC

26-30: DCBBC

二、填空题（每题 2 分，共计 20 分）

$$31. \cos^2 x - 2 \cos x + 3 \quad 32. 1 \quad 33. \frac{2}{(1+x^2)^2}$$

$$34. 6 \sin^2(2x+1) \cos(2x+1) \text{ 或 } 3 \sin(2x+1) \sin(4x+2)$$

$$35. \frac{2}{13} e^{2x} \cos 3x + \frac{3}{13} e^{2x} \sin 3x + C$$

$$36. \frac{1}{6} \quad 37. 4 \quad 38. e^{x \cos x} (\cos x - x \sin x) dx \quad 39. \pm \left\{ \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}} \right\} \quad 40. 5$$

三、解答题（每题 5 分，共计 50 分）

$$41. \text{解: } \frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^2 + ye^{xy} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2y + xe^{xy}$$

$$\therefore dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = (2xy^2 + ye^{xy})dx + (2x^2y + xe^{xy})dy$$

$$dz|_{(1,1)} = (2+e)dx + (2+e)dy = (2+e)(dx+dy)$$

$$42. \text{解: 令 } \sqrt{x} = t, \text{ 则 } x = t^2, dx = 2t dt, \text{ 又 } x = 0 \text{ 时, } t = 0; x = 1 \text{ 时, } t = 1.$$

$$\text{原式} = 2 \int_0^1 t e^t dt = 2 \int_0^1 t d e^t = 2 t e^t \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 e^t dt = 2e - 2e^t \Big|_0^1 = 2$$

$$43. \text{解: 原式} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2} \cdot 6} = e^6$$

$$44. \text{解: 原式} = \int \frac{1+\cos x}{2} dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos x dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \sin x + C$$

$$45. \text{解: 原始可化为: } \frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x(y+1)}, \text{ 分离变量: } \frac{(y+1)dy}{y} = \frac{dx}{2x},$$

$$\text{两边积分得: } \frac{1}{2} \ln x = y + \ln y + C'$$

$$46. \text{解: } \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+2)}{n+1} \cdot \frac{n}{\ln(n+1)} = 1, \text{ 得收敛半径 } R = \frac{1}{\rho} = 1.$$

$$(i) \text{ 当 } x = -1 \text{ 时, 原级数化为 } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln(n+1)}{n}$$

此级数为交错级数, 采用莱布尼茨判别法。

$$\text{令 } u(n) = \frac{\ln(n+1)}{n}, \text{ 则 } u(x) = \frac{\ln(x+1)}{x} (x > 0)$$

$$u'(x) = \frac{\frac{x}{x+1} - \ln(x+1)}{x^2} = \frac{x - (x+1) \ln(x+1)}{x^2(x+1)}$$

$$\text{再令 } v(x) = x - (x+1) \ln(x+1) \quad (x > 0)$$

$$v'(x) = 1 - \ln(x+1) - (x+1) \frac{1}{x+1} = -\ln(x+1) < 0$$

则 $v(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 即 $v(x) \leq v(0) = 0$

故 $u'(x) < 0$, 所以 $u(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 即 $u(n) = \frac{\ln(n+1)}{n}$ 为单调递减数列。

又 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1)}{n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x+1} = 0$, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n}$ 收敛。

(ii) 当 $x = 1$ 时, 原级数化为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n}$, $\because \frac{\ln(n+1)}{n} > \frac{1}{n}$ ($n \geq 2$ 时成立)

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n}$ 发散

综上所述, 原幂级数的收敛域 $[-1, 1)$

47. 解: 原方程两边同时对 x 求导有:

$$\frac{2x + y'}{x^2 + y} = 3x^2y' + x^3y' + \cos x \quad (1)$$

将 $x=0$ 代入原式, 解得: $y=1$

再将 $x=0, y=1$ 代入①式, 解得: $\frac{dy}{dx}|_{x=0} = 1$

48. 解: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{e^t \sin t + e^t \cos t}{e^t \cos t - e^t \sin t} = \frac{\sin t + \cos t}{\cos t - \sin t}$

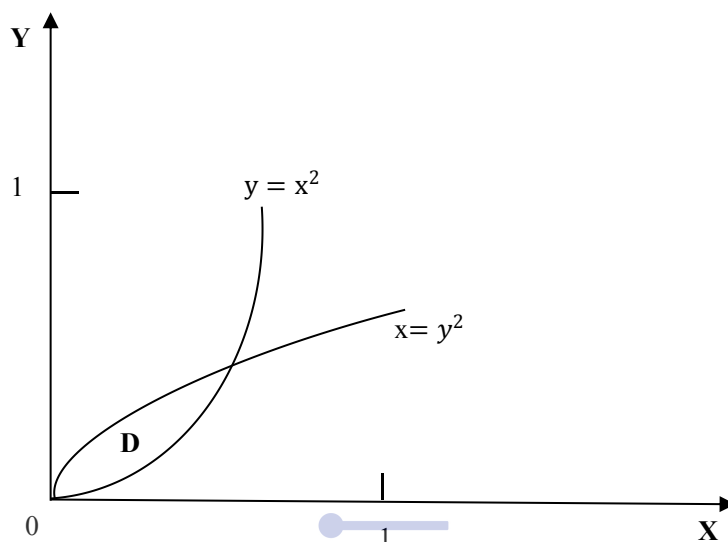
$$\therefore \frac{dy}{dx} \Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = -1, k_{\text{法线}} = -\frac{1}{\frac{dy}{dx} \Big|_{t=\frac{\pi}{2}}} = 1, \text{又 } t = \frac{\pi}{2} \text{ 时, } x = 0, y = e^{\frac{\pi}{2}}$$

故法线方程: $y - e^{\frac{\pi}{2}} = x$, 即 $y = x + e^{\frac{\pi}{2}}$

49. 解:

$$y' = (e^{\ln x^{\sin x}})' = (e^{\sin x \ln x})' = e^{\sin x \ln x} \left(\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x} \right) = x^{\sin x} \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right)$$

50. 解: 如图



$$\iint_D (x+y) dx dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x+y) dy = \int_0^1 \left(x^{\frac{3}{2}} - x^3 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^4 \right) dx$$

$$= \left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{10}x^5 \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{10}$$

四、应用题（每题 6 分，共 12 分）

51. 解：设所围矩形场地正面边长为 x m，另一个边长为 $\frac{150}{x}$ m，四面围墙的高且相同且高为 h m。

则四面围墙所有材料费用 $f(x)$ 为

$$f(x) = 6xh + 3 \left(2 \cdot \frac{150}{x} h \right) + 3xh = 9h \left(x + \frac{100}{x} \right) \quad x \in (0, +\infty)$$

$$f'(x) = 9h \left(1 - \frac{100}{x^2} \right)$$

令 $f'(x) = 0$ ，得驻点 $x_1 = 10, x_2 = -10$ (舍)。

又因为

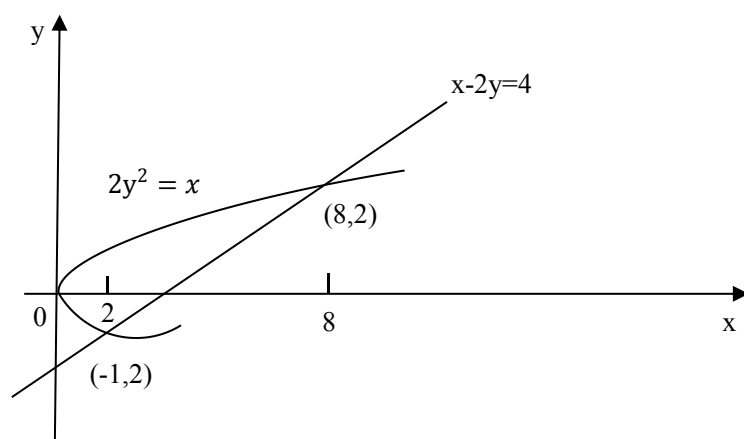
$$f''(x) = \frac{1800h}{x^3}, f''(10) = 1.8h > 0, \text{ 所以}$$

$x_1 = 10$ 是 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内唯一的极小值点，即 $f(x)$ 在 $x_1 = 10$ 处取得最小值。

因此，当正面长为 10m，侧面长为 15m 时，所用材料最少。

52. 解：联立 $\begin{cases} 2y^2 = x \\ x - 2y = 4 \end{cases}$ 的交点 $(2, -1), (8, 2)$

$$\text{如图，平面图形的面积 } S = \int_{-1}^2 (2y + 4 - 2y^2) dy = \left(y^2 + 4y - \frac{2}{3}y^3 \right) \Big|_{-1}^2 = 9$$



五、证明题（每题 8 分）

53. (1) 证明： 令 $F(x) = f(x) + x + 1$
 则 $F(0) = f(0) + 0 + 1 = -1$
 $F(1) = f(1) + 1 + 1 = 1$
 $F(0) \cdot F(1) = -1 < 0$

由零点定理得：存在一点 $\xi \in (0, 1)$ ，使 $F(\xi) = 0$

即 $f(\xi) + \xi + 1 = 0 \Rightarrow F(\xi) = 1 - \xi$

(2) 证明：由 (1) 知， $\exists \xi \in (0, 1)$ ， $f(\xi) = 1 - \xi$

设点 $\eta \in (0, \xi)$ ， $\mu \in (\xi, 1)$

对于 $\eta \in (0, \xi)$

$f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，在 $(0, 1)$ 内可导

则 $f(x)$ 在 $[0, \xi]$ 上连续，在 $(0, \xi)$ 内可导

由拉格朗日中值定理得： $\exists \eta \in (0, \xi)$ ，使 $f'(\eta) = \frac{f(\xi) - f(0)}{\xi - 0} = \frac{1 - \xi - 0}{\xi - 0} = \frac{1 - \xi}{\xi}$

对于 $\mu \in (\xi, 1)$ ， $f(x)$ 在 $[\xi, 1]$ 上连续，在 $(\xi, 1)$ 内可导

由拉格朗日中值定理得： $\exists \mu \in (\xi, 1)$ ，

使 $f'(\mu) = \frac{f(1) - f(\xi)}{1 - \xi} = \frac{1 - (1 - \xi)}{1 - \xi} = \frac{\xi}{1 - \xi}$

所以 $f'(\eta) \cdot f'(\mu) = \frac{1 - \xi}{\xi} \cdot \frac{\xi}{1 - \xi} = 1$

2016 年河南省普通高等学校 选拔优秀专科毕业生进入本科阶段学习考试 高等数学 参考答案

一、选择题

1-10 DADDC DABCD
 11-12 CAABD ACCCB

21-30 DABCB DABAC

二、填空题:

31. $y = \sqrt[3]{x}$ 32. $\frac{1}{2}$ 33. 可去 34. 1.01 35. $-\cos(x+1) + C$

36. $\ln 2$ 37. $dx - 2dy$ 38. $\left\{\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}$ 39. $y = \frac{2}{x^2+c}$ 40. 3

三、计算题

41. 解: $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{2}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} [1 + (-x)]^{-\frac{1}{x} \cdot (-2)} = e^{-2}$

42. 解:

$$y' = \left[(2 - \cos x)^{\frac{1}{2}} \right]' = \frac{1}{2} (2 - \cos x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2 - \cos x)' = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2 - \cos x}} \cdot (-1) \cdot (-\sin x)$$

$$= \frac{\sin x}{2\sqrt{2 - \cos x}}$$

43. 解: $\int \frac{2\ln x - 1}{x} dx = \int \frac{2\ln x}{x} dx - \int \frac{1}{x} dx = \int 2 \ln x d \ln x - \int \frac{1}{x} dx = \ln^2 x - \ln x + C.$

44. 解: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x d \cos x = -x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 0 + \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$

45. 解: 设直线 l 的方向向量为 $\vec{s}$.

则 $\vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} = \{-1, 2, -1\}$

又所求直线与直线 l 平行, 故可取直线 l 的方向向量为所求直线的方向向量, 又所求直线

过点 $A(0, 1, 2)$, 则所求直线方程为: $\frac{x}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-1}$

46. 解: $F(x, y, z) = xz - yz - x + y$

则 $F'_x = z - 1; F'_y = -z + 1; F'_z = x - y;$

因此, $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = \frac{1-z}{x-y}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = \frac{z-1}{x-y},$

则 $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{1-z}{x-y} dx + \frac{z-1}{x-y} dy.$

47. 法一: 解: 令 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$

$$\iint_D \sqrt{4-x^2-y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \sqrt{4-r^2} \cdot r dr$$

$$= 2\pi \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \int_0^2 \sqrt{4-r^2} d(4-r^2) = -\pi \cdot \frac{2}{3} (4-r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 = \frac{16}{3}\pi$$

法二：解：有几何意义可知：

$$\iint_D \sqrt{4-x^2-y^2} dx dy = \frac{1}{2} V_{\text{球}} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{2}{3} \pi \times 8 = \frac{16}{3} \pi$$

48.原式可化为: $y' + \frac{1}{x}y = 1$

该微分方程为一阶线性非齐次微分方程, 其中 $P_{(x)} = \frac{1}{x}$ $q_{(x)} = 1$

$$\text{其通解为: } y = e^{-\int p_{(x)} dx} \left[\int q_{(x)} e^{\int p_{(x)} dx} + C \right] = e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left[\int e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right]$$

$$= \frac{1}{x} \left[\int x dx + C \right] = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{2} x^2 + C \right) = \frac{1}{2} x + \frac{C}{x}$$

$$49.\text{解: } \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{n+2}}{\frac{(-1)^n}{n+1}} \right| = 1$$

则 $R = \frac{1}{\rho} = 1$ 又 $|x-1| < 1$, 即 $0 < x < 2$

当 $x=0$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$, 此级数发散。

$x=2$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$, 此级数收敛

所以收敛区间为 $(0,2]$

50.解: 先求收敛域,

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{n+1} \right| = 1, R = \frac{1}{\rho} = 1$$

在端点 $x=-1$ 处, 幂级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, 此级数收敛

在端点 $x=1$ 处, 幂级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, 此级数发散。

因此, 幂级数的收敛域为 $[-1,1)$

$$\text{令 } s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n},$$

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

对两边同时求导, 得

$$g(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\ln(1-x)$$

所以,

$$\text{则 } S(x) = -x \ln(1-x) \quad x \in [-1, 1)$$

四、应用题

$$51. \text{解: } S_D = \int_1^e \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^e = 1$$

52. 设工厂的利润为 $L(x)$

$$L(x) = R(x) - C(x) = 80x - 0.03x^2 - 7500 - 50x + 0.02x^2 = 30x - 0.01x^2 - 7500$$

令 $L'(x) = -0.02x + 30 = 0$ 得: $x=1500$ 且驻点唯一, 在实际问题中, 此点即为最大值点。

所以当日产量为 1500 台时, 利润最大。

五、证明题

$$53. \text{证明: 令 } F(x) = 4x + 3x^3 - x^5$$

因为 $F(x)$ 在 $[-2, 0]$ 上连续, 在 $(-2, 0)$ 内可导, 且显然 $F(0) = 0$, 由已知可知 $F(-2) = 0$, 根据罗尔定理, 必存在一点 $\xi \in (-2, 0)$, 使得 $f'(\xi) = f'(\xi) = 4 + 9\xi^2 - 5\xi^4 = 0$

即方程 $4 + 9x^2 - 5x^4 = 0$ 必有一个大于 -2 的负根。

宏富专升本 2015 年河南省普通高等学校 选拔优秀专科毕业生进入本科阶段学习考试 高等数学 参考答案 HONG LIANG EDUCATION

一、选择题 (每题 2 分, 共计 60 分)

1-5: CBBBC 6-10: AAACB 11-15: CBACA
16-20: BDBAA 21-25: CDDDA 26-30: AABBC

二、填空题 (每题 2 分, 共计 20 分)

31. $y=x+1$ 32. 0 33. 可去 34. 0.01 35. $\frac{1}{3} \sin(3x+2) + c$
36. 2 37. $dx+dy$ 38. $\pm \left(\frac{-3\sqrt{26}}{26}, \frac{2\sqrt{26}}{13}, \frac{\sqrt{26}}{26} \right)$ 39. $e^x - e^y = c$ 40. 1

三、解答题 (每题 5 分, 共计 50 分)

$$41. \text{解: 原式} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{\sin x}} \cdot \sin x \cdot \frac{1}{x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\sin x}{x}}$$

$$= e$$

42.解: $y = f(x)^{\frac{1}{2}}$, 又 $f(x) \neq 0$, $y' = \left(f(x)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x)$

43.解: 原式 $= \frac{1}{2} \int \frac{2xdx}{x^2+1} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C$

44.解: $\int_0^1 \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} d\sqrt{x}$

令 $\sqrt{x} = t$,

原式 $= \int_0^1 t e^t dt$

$$= \int_0^1 t de^t$$

$$= te^t \Big|_0^1 - \int_0^1 e^t dt$$

$$= e - (e - 1)$$

$$= 1$$

45.解: 由题知直线 l 的方向向量为

$$\vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 9\vec{i} + 7\vec{j} + 10\vec{k} = \{9, 7, 10\}$$

又直线平行于 l , 且直线过点 $A(1, 2, 1)$, 故直线方程为

$$\frac{x-1}{9} = \frac{y-2}{7} = \frac{z-1}{10}$$

46.解: 微分形式不变性:

$$2xdx + 2ydy + 2zdz - 4dz = 0$$

$$\therefore dz = \frac{-2xdx - 2ydy}{2z - 4} = \frac{2x}{4 - 2z} dx + \frac{2y}{4 - 2z} dy = \frac{x}{2 - z} dx + \frac{y}{2 - z} dy$$

47.解: 在极坐标下计算:

$$\begin{aligned} \iint_D e^{x^2+y^2} dx dy &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 e^{r^2} \cdot r dr \\ &= 2\pi \int_1^2 e^{r^2} \cdot dr^2 = \pi \int_1^2 e^{r^2} dr^2 = \pi e^{r^2} \Big|_1^2 = \pi(e^4 - e) \end{aligned}$$

48.解: $P(x) = \frac{1}{x}$, $Q(x) = \frac{e^x}{x}$

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left[\int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left[\int \frac{e^x}{x} e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right] \\
 &= e^{-\ln x} \left[\int \frac{e^x}{x} e^{\ln x} dx + C \right] \\
 &= \frac{1}{x} \left[\int e^x dx + C \right] \\
 &= \frac{1}{x} (e^x + C)
 \end{aligned}$$

49.解:

$$\begin{aligned}
 \therefore a_n &= \frac{(-1)^{n-1}}{n} \\
 \therefore R &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1 \\
 \therefore |x-1| &< 1 \\
 \therefore 0 < x < 2 \\
 \therefore \text{该幂级数收敛区间为 } (0,2).
 \end{aligned}$$

50.解: 令 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$, 则有 $f(x) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right]$,

又 $\therefore \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, x \in (-1,1)$

$$\begin{aligned}
 \therefore f(x) &= \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2} \\
 \therefore f(x) &= \frac{1}{(1-x)^2}, x \in (-1,1)
 \end{aligned}$$

四、应用题 (每题 6 分, 共 12 分)

51.解:

$$\begin{cases} y = e^x \\ y = e \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = e \end{cases}$$

$$S = e - \int_0^1 e^x dx = e - (e - 1) = 1$$

52.解: 设利润为 S

$$\begin{aligned}
 S &= R(x) - C(x) \\
 &= 350x - 0.004x^2 - 40000 - 200x + 0.002x^2 \\
 &= 150x - 0.002x^2 - 40000 \\
 S' &= 0 \text{ 得 } 150 - 0.004x = 0 \Rightarrow x = 37500
 \end{aligned}$$

$X=37500$ 为唯一驻点, 在实际问题中, 此点即为最大值点所以当生产 37500 辆自行车时, 公司利润最大.

五、证明题（每题 8 分）

53. 证明：令 $f(x) = x^{11} - x^7 - x^3 + x$ ，显然在 $[0,1]$ 上连续，且在 $(0,1)$ 内可导，

已知 $f(1) = 0$ ，又 $f(0) = 0$ ，即 $f(1) = f(0)$ ，

故满足罗尔定理，即存在一点 $\xi \in (0,1)$ ，使得 $f'(\xi) = 0$

又 $f'(x) = 11x^{10} - 7x^6 - 3x^2 + 1$ ，

且 $f'(\xi) = 0$ ，

故 $\xi \in (0,1)$ 是方程 $11x^{10} - 7x^6 - 3x^2 + 1 = 0$ 的一个解，这里 $\xi < 1$

固原命题得证.

2014 年河南省普通高等学校
选拔优秀专科毕业生进入本科阶段学习考试
高等数学 参考答案

一、选择题（每小题 2 分，共 60 分）

1-5: ACBAB

6-10: DBBCB

11-15: CBDBC

16-20: BDCCD

21-25: BDDBA

26-30: ACADC

二、填空题（每小题 2 分，共 20 分）

31. $\frac{1}{x} \ (x \neq 0)$

32. $\frac{8}{9}$

33. 1

34. $x^2 - x - 1$

35. $\frac{1}{2} \sin 2x + c$

36. 2

37. $c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$

38. 2

39. $2\sqrt{3}$

40. $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n, x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

三、计算题（每小题 5 分，共 50 分）

41. 解:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(e^x - 1)}{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 (\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 + x})}{1 + \tan x - (1 + x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 (\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 + x})}{\tan x - x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3}{\tan x - x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x^2}{\sec^2 x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x^2}{\tan^2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x^2}{x^2}$$

$$= 6$$

42.解: 由 $x^n = x^{n+1}$, 得 $x = 0$ 或 $x = 1$, 即曲线 $y = x^n$ 与 $y = x^{n+1}$ 交于点 $(0,0)$ 和

$$(1,1) \text{ 故 } a_n = \int_0^1 (x^n - x^{n+1}) dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{n+2} \right] \Big|_0^1 = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)},$$

$$\text{所以 } \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(n+1)(n+2)},$$

此级数为正项级数且 $u_n = \frac{\sqrt{n}}{(n+1)(n+2)}$ 由正项级数比较判别法的极限形式知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} = 0, \text{ 故 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(n+1)(n+2)} \text{ 与级数 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \text{ 的敛散性相同且}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \text{ 为收敛级数, 故 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(n+1)(n+2)} \text{ 为收敛级数, 即级数 } \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} a_n \text{ 收敛.}$$

43.解:

$$\text{原式} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} d(x^2-1)$$

$$= \frac{1}{2} \int (x^2-1)^{-\frac{1}{2}} d(x^2-1)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2-1)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = \sqrt{x^2-1} + c$$

44.解:

$$\int_0^4 |x-2| dx$$

$$= \int_0^2 (2-x) dx + \int_2^4 (x-2) dx$$

$$= \left[2x - \frac{x^2}{2} \right] \Big|_0^2 + \left[\frac{x^2}{2} - 2x \right] \Big|_2^4$$

$$= (4-2) + [(8-8) - (2-4)]$$

$$= 4$$

45.解: 原方程可化为 $y' - \frac{1}{x}y = x^2$ 为一阶段非齐次方程, 有公式可知, 其通解为

$$y = e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left(\int x^2 \cdot e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right)$$

$$\begin{aligned}
&= e^{\ln x} \left(\int x^2 \cdot e^{-\ln x} dx + C \right) \\
&= x \left(\int x^2 \cdot \frac{1}{x} dx + C \right) \\
&= x \left(\int x dx + c \right) \\
&= x \left(\frac{x^2}{2} + c \right) \\
&= \frac{x^3}{2} + cx
\end{aligned}$$

46.解:

$$\text{令 } F(x, y, z) = e^{-xy} - 2z + e^z$$

$$\text{则 } F'_x = -ye^{-xy}, F'_y = -xe^{-xy}, F'_z = e^z - 2$$

$$\text{故 } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = \frac{ye^{-xy}}{e^z - 2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = \frac{xe^{-xy}}{e^z - 2}$$

$$\text{所以 } dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

$$= \frac{ye^{-xy}}{e^z - 2} dx + \frac{xe^{-xy}}{e^z - 2} dy$$

47.解:

$$\vec{AB} = \{-3, 3, -4\}, \vec{AC} = \{-2, 1, -1\}$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \{1, 5, 3\}$$

$$|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{1^2 + 5^2 + 3^2} = \sqrt{35}$$

$$\Delta ABC \text{ 的面积等于 } \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{\sqrt{35}}{2}$$

48.解:

该二重积分适合选择极坐标系下进行计算, D: $0 \leq \theta \leq 2\pi, 1 \leq r \leq 2$, 故

$$\begin{aligned}
\iint_D \ln \sqrt{x^2 + y^2} dx dy &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 \ln r \cdot r dr \\
&= \pi \int_1^2 \ln r dr^2 \\
&= \pi \left[r^2 \ln r \Big|_1^2 - \int_1^2 r dr \right]
\end{aligned}$$

$$= \pi \left[4 \ln 2 - \frac{3}{2} \right]$$

49.解:

设 D 为 $x^2 + y^2 = 1$ 围成的圆域内部, 则有格林公式知

$$\begin{aligned} & \oint y(1+x^2)dx + x(1-y^2)dy \\ &= \iint_D \left\{ \frac{\partial [x(1-y^2)]}{\partial x} - \frac{\partial [y(1+x^2)]}{\partial y} \right\} dx dy, \text{ 其中 } D: x^2 + y^2 = 1 \\ &= \iint_D [(1-y^2) - (1+x^2)] dx dy \\ &= - \iint_D (x^2 + y^2) dx dy \\ &= - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^2 \cdot r dr \\ &= - 2\pi \int_0^1 r^3 dr \\ &= - 2\pi \frac{r^4}{4} \Big|_0^1 \\ &= - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

50.解: 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 中 $a_n = \frac{1}{n+1}$

有公式知 $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n+1}} \right| = 1$, 故收敛半径 $R = \frac{1}{\rho} = 1$,

$x = 1$ 时, 幂级数为 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ 收敛级数;

$x = -1$ 时, 幂级数为 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ 发散级数;

故幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的收敛域为 $[-1, 1)$.

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \cdots + \frac{x^n}{n+1} + \cdots$$

$$= \frac{1}{x} \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots \right)$$

$$= \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, x \neq 0,$$

$$\text{令 } S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n \right) dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\ln(1-x),$$

$$\text{故 } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = -\frac{\ln(1-x)}{x}, x \in [-1, 1), \text{ 且 } x \neq 0, \text{ 当 } x=0 \text{ 时, 和为 } 1$$

$$\text{则 } s(x) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x), & x \in [-1, 1), \text{ 且 } x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

$$\therefore s(x) = -\frac{1}{x} \ln(1-x) \quad (-1 \leq x < 1)$$

四、应用题（每题 7 分，共计 14 分）

51. 解：设场地的长为 x ，宽为 y ，高为 h ，造价为 s ，面积为 A ，则由题意知 $A=xy=150$.

$S = 6xh + 3(2y + x)h = 9xh + 6yh$ 问题转化为在条件 $xy=150$ 下 $10\text{du}S=9xh+6yh$ 的最小值.

构造函数 $L(x, y, \lambda) = 9xh + 6yh + \lambda(xy - 150)$

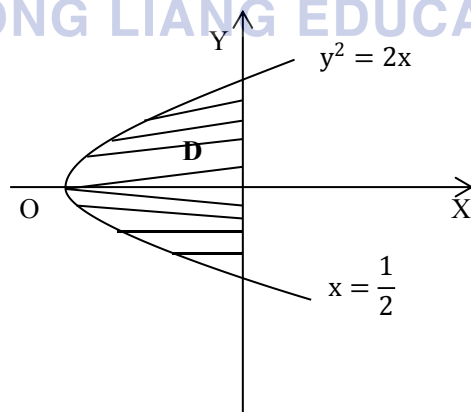
$$\text{由 } \begin{cases} L'_x = 9h + \lambda y = 0 \\ L'_y = 6h + \lambda x = 0 \\ L'_z = xy - 150 = 0 \end{cases}$$

解得 $x=10, y=15$

故有实际意义知当场地的长为 10 米，宽为 15 米时造价最低.

52. 解：

D 的图形如图所示：



(1) 区域 D 的面积

$$S = \frac{1}{2} [1 - (-1)] - \int_{-1}^1 \frac{y^2}{2} dy = 1 - \int_{-1}^1 \frac{y^2}{2} dy = 1 - \frac{y^3}{6} \Big|_{-1}^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

(2) 区域 D 绕 x 轴旋转所形成的旋转体的体积

$$V = \pi \int_0^{\frac{1}{2}} (\sqrt{2x})^2 dx = \pi \int_0^{\frac{1}{2}} 2x dx = \pi x^2 \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

五、证明题（共 6 分）

53. 证明：令 $f(x) = \ln^2 x$ ，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导，由拉格朗日中值定理知存在 $\varepsilon \in (a, b)$ ，使得 $f'(\varepsilon) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 即 $\frac{2 \ln \varepsilon}{\varepsilon} = \frac{\ln^2 b - \ln^2 a}{b-a}$ 又 $e < a < b < e^2$ 且 $a < \varepsilon < b$

所以 $\varepsilon < e^2$

$$\text{所以 } \frac{2 \ln \varepsilon}{\varepsilon} > \frac{2 \ln e^2}{e^2} = \frac{4}{e^2}$$

$$\text{所以 } \frac{\ln^2 b - \ln^2 a}{b-a} > \frac{4}{e^2}$$

$$\text{所以 } \ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2} (b-a)$$

2013 年河南省普通高等学校 选拔优秀专科毕业生进入本科阶段学习考试 高等数学 参考答案

三、选择题（每题 2 分，共计 60 分）

1-5: CDBBA

6-10: CBDAA

11-15: BAABD

16-20: DACBB

21-25: CBD CB

26-30: ACDCA

四、填空题（每题 2 分，共计 20 分）

31. 既不充分也不必要 32. $\frac{2}{3}$ 33. $\frac{1}{2}$ 34. $-\frac{2}{x^3}$ 35. $\ln(2x + \sin x) + C$

36. $\frac{2\pi}{3}$ 37. $y = x + Ce^{-x} - 1$ 38. -5 39. $2x + 4y - z = 5$

40. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} \cdot (x-4)^n$

三、解答题（每题 5 分，共计 50 分）

41. 解：原式 = $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x \ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{2x(1+x)} =$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{2(1+x)} = -\frac{1}{2}$$

42. 解：方程 $\arctan \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ 两边对 y 求导，得

$$\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{x-yx'}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{2xx'+2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\text{即 } \frac{x-yx'}{x^2+y^2} = \frac{xx'+y}{x^2+y^2}, x-y = (x+y)x'$$

$$\text{即 } \frac{dx}{dy} = x' = \frac{x-y}{x+y}.$$

43.解: 令 $\sqrt{x} = t$, 则 $x = t^2, dx = 2t dt$,

$$\text{原式} = \int \arctan t \cdot dt^2 = t^2 \arctan t - \int \frac{t^2}{1+t^2} dt$$

$$= t^2 \arctan t - \int \frac{1+t^2-1}{1+t^2} dt$$

$$= t^2 \arctan t - \int dt + \int \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$= t^2 \arctan t - t + \arctan t + C$$

$$\text{将 } t = \sqrt{x} \text{ 代入得 } \int \arctan \sqrt{x} dx = x \arctan \sqrt{x} - \sqrt{x} + \arctan \sqrt{x} + C$$

$$44.\text{解: } \int_1^3 f(x-2) dx = \int_1^3 f(x-2) d(x-2)$$

$$= \int_{-1}^1 f(t) dt = \int_{-1}^0 (1+x^2) dx + \int_0^1 e^x dx$$

$$= \left(x + \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_{-1}^0 + e^x \Big|_0^1 = e + \frac{1}{3}$$

45.解: 对应其次方程的特征方程为 $2\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$, 特征根为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \frac{1}{2}$, 所

以原方程对应其次方程的通解为 $y_1 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{\frac{1}{2}x}$, C_1, C_2 为任意常数, 设 $y = Ae^x$ 为方程特解, 代入方程得 $2Ae^x + Ae^x - Ae^x = 3e^x$, 即 $A = \frac{3}{2}$, 故原方程的通解为 $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{\frac{1}{2}x} + \frac{3}{2} e^x$, 其中 C_1, C_2 为任意常数.

46.解: $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + ye^{xy}, \frac{\partial u}{\partial y} = 2 \cos 2y + xe^{xy}$, 所以

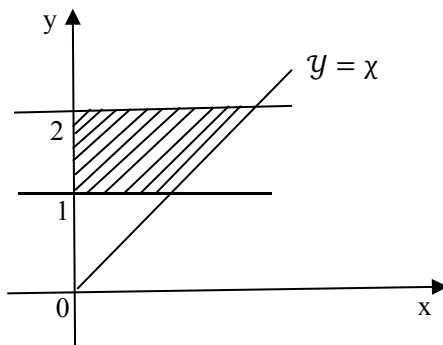
$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = (2x + ye^{xy}) dx + (2 \cos 2y + xe^{xy}) dy.$$

47.解: 设 c 为所求平面的一个法向量, 则

$$c = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = i - 5j - 3k, \text{即 } c = \{1, -5, -3\}, \text{又平面过点 } (1, 0, -1),$$

所以所求平面的方程为 $(x-1) - 5y - 3(z+1) = 0$, 即 $x - 5y - 3z = 4$.

48.解: 积分区域如图所示,



第 48 题图

$$\begin{aligned}\iint_D e^{\frac{x}{y}} dx dy &= \int_1^2 dy \int_0^y e^{\frac{x}{y}} dx = \int_1^2 y e^{\frac{x}{y}} \Big|_0^y dy = \int_1^2 y(e-1) dy \\ &= (e-1) \cdot \frac{1}{2} y^2 \Big|_1^2 \\ &= \frac{3(e-1)}{2}\end{aligned}$$

49.解: 由于 $\frac{\partial(x^2 + 2xy - y^2 + 10)}{\partial y} = 2x - 2y = \frac{\partial(x^2 - 2xy - y^2 + 15)}{\partial x}$, 所以所求积分与路径无关, 所以可以沿直线 $y=0$ 积分,

$$\text{原式} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} (x^2 + 10) dx = \left(\frac{1}{3} x^3 + 10x \right) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi^3}{12} - 10\pi$$

50.解:

$$\text{因为 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_n}{u_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{2^n(n+1)}}{\frac{1}{2^{n+1}(n+2)}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+2)}{n+1} = 2, \text{ 所以幂级数的收敛半径为 } 2,$$

所以 $|x-1| < 2$, 即收敛区间为 $(-1, 3)$, 当 $x = -1$ 时, 原级数为 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$

收敛, 当 $x = 3$ 时, 原级数为 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ 发散, 故原幂级数的收敛域为 $[-1, 3)$.

四、应用题 (每题 6 分, 共 12 分)

51.解: 设租金定为 x 元时对应的收入为 y 元, 则 $y = \left(50 - \frac{x-2000}{100} \right) (x-200)$, 即

$$y = -\frac{x^2}{100} + 72x - 14000, x \geq 2000,$$

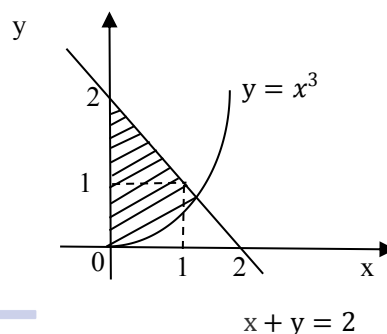
令 $y' = -\frac{x}{50} + 72 = 0$, 得唯一驻点 $x = 3600$, 结合实际问题, 知当租金定为 3600 元时, 可获得最大收入, 最大收入为 115600 元。

52. 解:

平面图形如图所示

所求体积

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \pi \cdot (\sqrt[3]{y})^2 dy + \int_1^2 \pi (2-y)^2 dy \\ &= \frac{3\pi}{5} y^{\frac{5}{3}} \Big|_0^1 + \frac{\pi}{3} (y-2)^3 \Big|_1^2 = \frac{3\pi}{5} + \frac{\pi}{3} = \frac{14}{15}\pi. \end{aligned}$$



五、证明题 (每题 8 分)

53. 证明:

令 $F(x) = 2x - \int_0^x f(t)dt - 1$, 则 $F(x)$ 为 $[0,1]$ 上连续函数,

且 $F(0) = -1 < 0, F(1) = 2 - \int_0^1 f(t)dt - 1 = 1 - \int_0^1 f(t)dt$,

由于 $f(t) < 1$, 则 $\int_0^1 f(t)dt < 1$, 故 $F(1) > 0$, 由零点定理知, $F(x)$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个零点, 又 $F'(x) = 2 - f(x) > 1 > 0$, $F(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调增加,

因此方程 $2x - \int_0^x f(t)dt = 1$ 在 $(0,1)$ 内有且仅有一个实根.

宏亮专升本
HONG LIANG EDUCATION